Alte Geschichten von neuen Zahlen – Quadrieren rückwärts rechnen

Herausgegeben von:
Bärbel Barzel
Stephan Hußmann
Timo Leuders
Susanne Prediger

Autoren:
Susanne Prediger
Gerd Seifert
Antje Marcus
Gilbert Greefrath

Redaktion:
Raja Herold-Blasius

Titel **Alte Geschichten von neuen Zahlen – Quadrieren rückwärts rechnen**

Thema **Wurzeln und irrationale Zahlen**

Kontexte – Kernfragen – Kernidee

Wurzel ziehen ist quadrieren rückwärts rechnen – diese Kernidee trägt durch das Kapitel und wird im Kontext historischer Betrachtungen thematisiert. Mit einem historischen Kontext (in **E1**, **E7**, **E8**, **E10**, **V17**) werden die Lernenden seit dem Kapitel Zahldarstellungen in Klasse 5 zum ersten Mal wieder ausführlicher konfrontiert. Sie sollen dabei erfahren, in wie vielen Schritten sich die Mathematik zu ihrer heutigen Gestalt entwickelt hat und dass dabei nicht immer alle Mathematikerinnen und Mathematiker einer Meinung waren. So begreifen sie die Mathematik als etwas kulturell Erwachsenes.
Neben der historischen Ebene umfasst das Kapitel Aspekte auf der strukturmathematischen Ebene (die Entdeckung der Irrationalität mancher Wurzeln und die daher notwendige Zahlbereichserweiterung von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen) und wichtige Fertigkeiten auf der rechenpraktischen Ebene (das Umgehen mit Wurzeln und ihren Rechengesetzen, die die Lernenden eigenständig erkunden können).

Kernfrage A: **Warum ist es so schwierig, Quadrieren rückwärts zu rechnen?**

Die Kernfrage „Warum ist es so schwierig, Quadrieren rückwärts zu rechnen?" wird am bekannten Quadratproblem (wie finde ich zu einem Einheitsquadrat die Seitenlänge des Quadrats mit doppelter Fläche?) eröffnet, das in dem berühmten historischen Dialog von Sokrates und Menon in **E1|E1** eingeführt wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Dialog nachspielen, denn erst nach einigem Nachdenken wird den meisten klar, warum das Quadrieren rückwärts so schwierig ist. Der Zusammenhang zur Diagonale im Quadrat wird in **E2** hergestellt, in der auch die tabellarische Darstellung eingeführt wird. Diese Tabellendarstellung ist für das Kapitel zentral, weil sie hilft, das Wurzelziehen funktional und im Zusammenhang der Zahlen zu begreifen statt als jeweils isolierte Rechenoperation (**O1**). Damit wird es auch möglich, Wurzeln einfach abzuschätzen, wie in **E3** und **O2** erarbeitet wird.
Die Beschäftigung mit verschiedenen (auch historischen) Annäherungen an Wurzeln in **E4**, **O3**, **E7** gibt eine zweite Antwort auf die Kernfrage, warum das Wurzelziehen schwierig ist: Ist die Wurzel nicht sowieso ganzzahlig, dann kommt man beim Annähern niemals an eine erste, für einige Lernende faszinierende Erfahrung mit dem Unendlichen (**E5**, **E6**).
Die dritte, strukturmathematische Antwort auf die Kernfrage zielt dann auf die Entdeckung der Irrationalität vieler Wurzeln (**E5**, **E6**, **E8**). Sie führt zur Zahlbereichserweiterung von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen (**O5**).

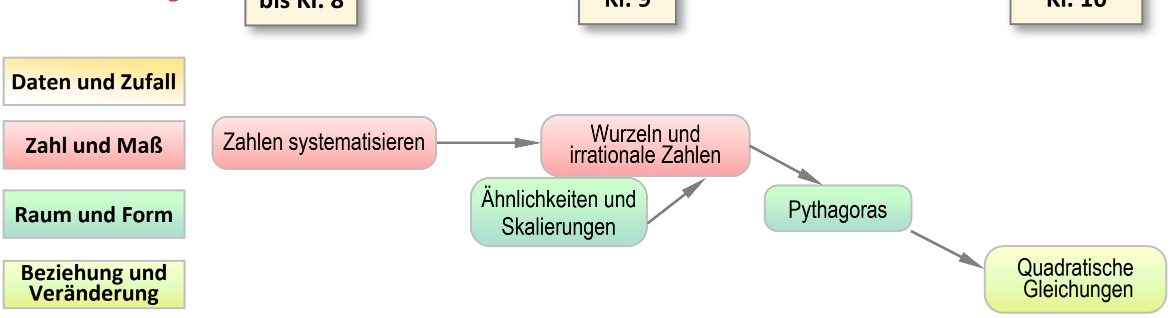
Kernfrage B: **Wie kann man mit Wurzeln rechnen?**

Das Rechnen mit Wurzeln genügt bestimmten Gesetzen, die in **E9|E9** erkundet und formuliert und in **O6** systematisiert werden. Gerade weil viele Schülerinnen und Schüler immer wieder Fehler machen (wie die Wurzel aus Summen zu ziehen), wird hier dem Aufbau negativen Wissens (d.h. explizites Wissen über typische Fehler und Fallen) viel Raum gegeben.
Der historische Kontext wird durch die Erstellung eines Überblicks in **E10** abgerundet.

Kompetenzen

K1: Ich kann erklären, was eine Wurzel ist.
K2: Ich kann Wurzeln durch Abschätzen ermitteln.
K3: Ich kann Wurzeln beliebig genau annähern und die Idee eines Annäherungsverfahren erklären.
K4: Ich kann für die Wurzel einer natürlichen Zahl entscheiden, ob ihre Nachkommastellen abbrechen oder nicht.
K5: Ich kann für eine Zahl entscheiden, ob sie rational, irrational, reell, ganz oder natürlich ist.
K6: Ich beherrsche die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln.
K7: Ich kann mit einfachen Wurzeln von Bruchzahlen und Dezimalzahlen rechnen.
K8: Ich kann mit Wurzeln und Variablen rechnen.

Zusammenhang



Struktur ca. 2 Wochen

Einstieg: Historische Dimension des Quadratproblems						15	
A Warum ist es so schwierig, Quadrieren rückwärts zu rechnen?						**E**	**O**
E1 | E1 E2 E3	Quadratproblem bei Sokrates Quadratproblem mit Falten und Tabelle Wurzel ziehen als Quadrieren rückwärts erkunden	O1 O2	Wurzelziehen als Quadrieren rückwärts rechnen Wurzeln abschätzen	V1, V3, V4 V2, V5 | V2, V5 V6, V7 V8 | V8	Wurzeln ermitteln und schätzen	45 20 30	30 30
■ | E4	*Approximieren der Wurzel erkunden*	■ | O3	*Approximieren der Wurzel*	■ | V9-V13	*Wurzeln annähern*	20	45
■ | E5 ■ | E6	*Nicht Abbrechen mancher Wurzeln untersuchen* *Wurzeln nach Abbrechen einteilen*	■ | O4	*Drei Gruppen von Wurzeln für ganze Zahlen*	■ | V14-V21	*Wurzeln, Brüche und Dezimalzahlen*	30 30	35
■ | E7 ■ | E8	*Wurzeln durch Brüche annähern* *Irrationalität der Wurzel*	■ | O5	*Unterschiedliche Zahlbereiche*	■ | V19-V21	*Irrationale und rationale Zahlen*	20 15	30
B Wie kann ich mit Wurzeln rechnen?						**E**	**O**
E9 | E9	Rechenregeln erkunden	O6 O7	Rechnen mit Wurzeln Umgang mit Taschenrechner	V22 | V22 V23 V24 | V24 ■ | V25 V26, V27 V28, V29 | V28, V29	Mit Wurzen rechnen	40	60 10
				■ | V30-V32	*Mit Wurzeln und Variable rechnen*		
■ | E7	*Historischer Blick zurück*					30	

Basisweg (bei Nutzung aller Basisaufgaben):

E1 – E2 – E3 – O1 – O2 – E9 – O6 – O7

(ohne irrationale Zahlen, ohne Annäherungen, ohne Brüche und Dezimalzahlen, der Historische Blick in E10 kann ergänzt werden)

Intensivzugriff

Etappe A: Warum ist es so schwierig, Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Eine Zahl wie 8 zu quadrieren ist einfach, 8 mal 8. Wieso ist es so viel schwieriger, herauszubekommen, welche Zahl man mit sich selbst multiplizieren muss, damit 8 herauskommt, also das Quadrieren rückwärts zu rechnen? Diese Kernfrage trägt durch die erste Etappe und wird im Kapitel auf vier verschiedenen Ebenen beantwortet.

Auf der *konzeptuellen Ebene* muss das Wurzelziehen als Operation verstanden werden, die das Quadrieren rückgängig macht. Mit der Darstellung der Tabelle (in **E2** und **O1**) gelingt es schnell, die Umkehrbeziehung zu verdeutlichen. Und gerade wer Wurzeln mit Taschenrechner ausrechnet, muss vorher das Umkehren von Rechenoperationen verstehen (um dann zum Beispiel Taschenrechnerergebnisse zu kontrollieren).

Quadrieren

Seitenlänge des Quadrats	Flächeninhalt des Quadrats
1 cm	1 cm²
2 cm	4 cm²
	8 cm²
3 cm	9 cm²
	10 cm²
4 cm	16 cm²
	25 cm²

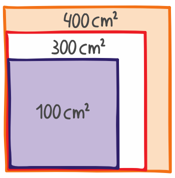
Quadrieren umgekehrt

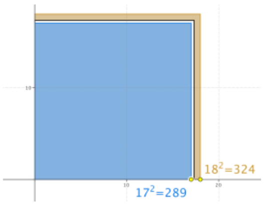
Auf *rechenpraktischer Ebene* ermöglicht die Tabelle den Zugang zu der wichtigsten Fertigkeit im Umgang mit Wurzeln (**E3** und **O2**): das Schätzen von Wurzeln.

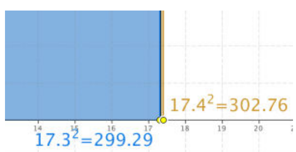
Die Zahl 8 liegt zwischen den Quadratzahlen 4 und 9, also muss die Wurzel von 8 zwischen 2 und 3 liegen.

Solche Abschätzungen müssen alle Schülerinnen und Schüler machen können. Dazu ist es auch wichtig, die Quadratzahlen bis 15^2 oder 20^2 auswendig zu kennen. Gerade für schwächere Lernende im Basisweg muss daher auf den Umgang mit der Tabelle, auf das Auswendigwissen der Quadratzahlen und auf das Schätzen können äußerst großer Wert gelegt werden.

Im *zweiten Schritt* des Kapitels werden nun die nicht ganzzahligen Wurzeln genauer angenähert (**E4** und **O3**). Den Annäherungsprozess durch Einschachtelung unterstützt ein Applet (in **V9** und **V10**), in dem die Annäherung praktisch vollzogen werden kann, die Werte werden dann in eine Tabelle übertragen.







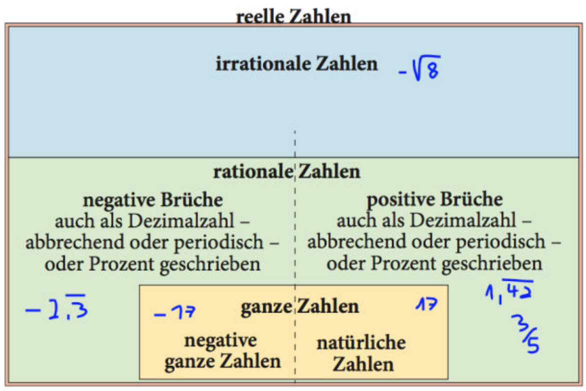
kleineres Quadrat		ermittelter Näherungswert	größeres Quadrat	
Flächeninhalt in cm²	Seitenlänge in cm	$\sqrt{300} \approx \dots$	Seitenlänge in cm	Flächeninhalt in cm²
100	10	1_	20	400
289	17	17,_	18	324
	17,3	17,3_	17,4	

Diese Annäherungsprozesse ermöglichen vielen Lernenden eine interessante Begegnung mit dem Unendlichen und bereiten auf die Oberstufenmathematik (mit einer intuitiven Grenzwerterfahrung) vor.

Auf *strukturmathematischer Ebene* ist folgendes zu lernen: Wurzeln der natürlichen Zahlen entweder selbst ganzzahlig sind, oder ihre Nachkommastellen niemals enden (**E6** und **O4**). Dieses Wissen lässt sich differenzierend thematisieren. Während die einen es nur vermuten und dann eine Bestätigung per Mitteilung durch die Lehrkraft bekommen, können die anderen auch zwei Beweise dazu vertiefen:

1. Wurzel 2 kann niemals ein Bruch sein (der anspruchsvolle indirekte Beweis von Euklid wird in **V17** als Differenzierung nach oben angeboten),
2. das Quadrat einer Dezimalzahl mit Nachkommastellen kann niemals wieder keine Nachkommastelle haben, denn alle „letzten Ziffern“ erzeugen eine andere letzte Ziffer als Null (**E5** und **V16**).

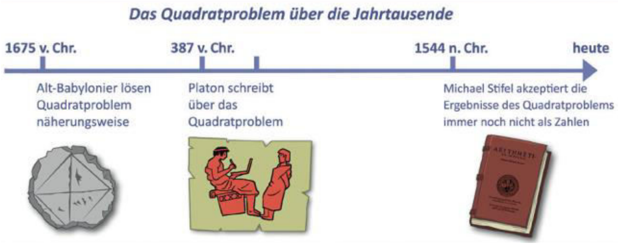
Die strukturmathematische Erkenntnis, dass manche Wurzeln keine abbrechenden Dezimalzahlen sind, also keine rationalen Zahlen, führt zur Notwendigkeit, mit den irrationalen Zahlen einen neuen Zahlbereich einzuführen (**O5**).



Obwohl dies für die Hochschulmathematik sehr wichtig ist, kommt dieses Wissen allerdings nicht mehr in allen Schulcurricula prominent vor, hier wird also eine lokale Auswahl der Inhalte notwendig sein.

Als Kompensation für diejenigen, für die hier weder alles Begründungswissen noch alles strukturmathematische Wissen notwendig ist, kann die *historische Ebene* interessant sein. Platon schrieb seinen berühmten Dialog zwischen Sokrates und dem Sklaven Menon (**E1**: „Junge“), um zu verdeutlichen, welche Kraft das theoretische Denken hat. Das klassische Quadratproblem (Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1, wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt?) wird zunächst (vom Jungen) intuitiv falsch beantwortet (mit Seitenlänge 2). Dann wird aber erfahrbar, dass die Lö-

sung schwieriger ist. In der Geschichte der Mathematik war die Einsicht, dass Wurzel 2 keine Bruchdarstellung hat, sehr einschneidend, sie hat den grenzenlosen Optimismus der Mathematisierbarkeit („Alles ist Zahl“) zum ersten Mal gebremst, auch wenn die Legende über den versenkten Mathematiker Hippassos von Metapont nach Entdeckung der Irrationalität der Wurzel (in **E7**) vermutlich falsch ist. Darüber zu sprechen, ist auch für Jugendliche interessant.
Den nicht rationalen Zahlen kann man zwar leicht einen Namen geben, doch der Name „irrationale Zahlen“ zeigt auch, dass viele sich mit Mathematik befassende Menschen Zahlen „unvernünftig“ fanden, die man nicht mit einer abbrechenden oder periodischen Dezimalzahl aufschreiben konnte. Da dies auch vielen Jugendlichen so geht, kann ihnen die Information über Michael Stifel (in **E8**) einen Trost sein.
Der historische Kontext, der in den Aufgaben **E1**, **E7**, **E8**, **E10**, **V17** immer wieder angesprochen wird, kann mit der Erstellung eines Zeitstrahls in **E10** abgerundet werden. Damit können die Lernenden die einzelnen Episoden zeitlich einsortieren und bilanzieren können.



Etappe B: Wie kann ich mit Wurzeln rechnen?

Auch wer die strukturmathematischen Überlegungen der Aufgaben **E4-E8** nicht bearbeitet hat, muss in Etappe B wieder mit einsteigen auf der *rechenpraktischen Ebene*. Das Rechnen mit Wurzeln genügt bestimmten Gesetzen, die Schülerinnen und Schüler „einfach nur anwenden“ müssen, zum Beispiel wenn sie im Kapitel den Satz des Pythagoras nutzen.
Dabei kommt es allerdings zu immer wieder gleichen Fehlern wie dem separaten Wurzelziehen aus Summen. Solche Fehler lassen sich nur vermeiden, wenn aktiv negatives Wissen (als explizites Wissen über Fehler und Fallen) aufgebaut und reflektiert wird, die Kernfrage müsste also eigentlich lauten: Wie kann ich mit Wurzeln rechnen, und wie nicht?
In **E9|E9** werden die Lernenden daher dazu angeregt (in differenzierend angeleiteter Form), selbst auszuprobieren, welche Umformungen gültig sind und welche nicht, bevor dieses Wissen in **O6** festgehalten wird.

Regel, die geprüft werden soll	Beispiel mit Zahlen	Wert des Terms links	Wert des Terms rechts	Stimmt die Regel für alle positiven Zahlen? nein	vielleicht
$\sqrt{a \cdot b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{16 \cdot 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$	$\sqrt{16 \cdot 9} =$	$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} =$		
$\sqrt{a : b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} : \sqrt{b}$	$\sqrt{16 : 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} : \sqrt{9}$				
$\sqrt{a + b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{16 + 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} + \sqrt{9}$				
$\sqrt{a - b} \stackrel{?}{=} \sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{16 - 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} - \sqrt{9}$				

Der Umgang mit dem Taschenrechner ist eine weitere Anforderung, zu deren Reflektion **O7** anregt. Diese ist allerdings relativ offen gehalten, um den verschiedenen eingeführten Taschenrechnern gerecht zu werden.

Differenzierung mithilfe von Basisaufgaben

Das Kapitel mit seinen Inhalten auf der historischen, rechenpraktischen und strukturmathematischen Ebene erfordert unbedingt, nach Lerninhalten zu differenzieren. Je nach Bildungsgang und individuellen Lernvoraussetzungen der Lernenden kann vieles eingespart werden: Der Basisweg **E1** – **E2** – **E3** – **O1** – **O2** – **E1** – **O6** – **O7** mit den weiteren Basisaufgaben **V2**, **V5**, **V8** sowie zum Rechnen **V22**, **V24**, **V28**, **V29** sichert für schwächere Lernende ab, dass die minimalen, aber für die weiteren Kapitel sehr wichtigen Kenntnisse im verständigen Umgang mit Wurzeln und Wurzelschätzen erworben werden.
Gleichzeitig bieten die strukturmathematischen Vertiefungen eine willkommene Rampe nach oben (**V12**, **V13** zu weiteren Annäherungsverfahren; **V16**, **V17** zur Begründung der Irrationalität mancher Wurzeln; **V29-V32** zum Rechnen mit Variablen).
Bei weiterem Übungsbedarf für noch unsichere Lernende kann auf den jeweiligen Niveaus auf das Zusatztraining mit mehr Aufgaben vom selben Typ im digitalen Angebot zurückgegriffen werden.

Kurzweg

Die strukturmathematische Beschäftigung mit der Erweiterung des Zahlbereichs der rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen zu den reellen Zahlen ist zwar ein klassischer Schulstoff der höheren Schulen, aber nicht in allen Schulcurricula in gleicher Weise priorisiert.
Abkürzungen des Kapitels sind möglich bei diesen strukturmathematischen Inhalten, auf denen in der Sekundarstufe 1 und 2 nicht weiter aufgebaut wird. Dies betrifft die Erkundenaufgaben **E4-E8**, die Ordnenaufgaben **O3-O5** und die Vertiefenaufgabe **V9-V21**.
Keinesfalls versuchen Zeit zu sparen, sollte man beim Schätzen von Wurzeln. Diese Fertigkeit ist sowohl für das Verständnis zentral ist als auch für die Validierung von Rechnungen (z.B. mit Taschenrechner).

Zusätzliches Trainingsangebot

Zu jeder Trainingsaufgabe befinden sich weitere Trainingsaufgaben im Onlinebereich des Cornelsen Verlags.

Literatur

Alten, H.W.; Naini, A.D.; Folkerts, M.; Schlosser, H.; Schlote, K. & Wußing, H. (2003): *4000 Jahre Algebra: Geschichte. Kulturen. Menschen (Vom Zählstein zum Computer)*. Springer, Berlin.
Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H. (2003): Die Wurzel aus Zwei. *Mathematiklehren*, 121, 42-43.

Einstiegsseite – Historische Dimension des Quadratproblems und der irrationalen Zahlen

Ziele
Die Schülerinnen und Schüler …
- erhalten einen ersten Eindruck darüber, dass Mathematik historisch gewachsen ist;
- lernen das Quadratproblem kennen.

Bezug
Quadratproblem wird in **E1** thematisiert.
Historische Entwicklungslinien werden im Laufe des Kapitels aufgebaut und in **E10** systematisiert.

Bezug
Einstiegsseite als Overheadfolie oder per Beamer

Umsetzungsvorschlag (15 min)

Lehrkraft erläutert an der Tafel die Fragestellung des Quadratproblems: Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt?	UG
Lernende arbeiten kurz in Partnerarbeit daran, das passende Quadrat zu finden	PA
Gemeinsam werden Lösungen problematisiert	UG
Nun wird das Schulbuch aufgeschlagen und die Lernenden erfahren, dass dieses Problem eine 2500 Jahre lange Geschichte hat.	UG

Die vier Freunde sind im Museum und wenden sich der historischen Dimension von Mathematik zu.

Das Quadratproblem ist der Ausgangspunkt des Kapitels, über das Wurzel 2 eingeführt wird, die historische Szene wird in **E1** aufgegriffen.

Der Zeitstrahl an der Wand steht dafür, dass Mathematik erst sukzessive entwickelt wurde, die Lernenden vervollständigen ihn in **E10**.

Ziele des Kapitels aus Vorschauperspektive

In diesem Kapitel…

- rechnest du Quadrieren rückwärts und suchst Seitenlängen von Quadraten mit bekanntem Flächeninhalt.
- erfährst du, wie lange sich Menschen in der Geschichte schon damit beschäftigen und was sie entdeckt haben.
- lernst du, dass für das Umkehren des Quadrierens neue Zahlen nötig sind.
- lernst du, wie man mit den neuen Zahlen rechnet.

Erkunden A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

E1|E1 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- denken sich in die Problematik des Quadratproblems aus der Antike ein;
- erkennen, dass die Umkehrung des Quadrierens neue mathematische Herausforderungen mit sich bringt;
- erfahren die historische Dimension der Geometrie.

E1|E1 Bezug
Die Basisfassung ist wesentlich enger angeleitet, kann aber parallel geführt werden. Unmittelbar E2 zur weiteren Klärung anschließen oder integrieren vor Rollenspiel.

E1|E1 Umsetzungsvorschlag (45 min)

a)	Bearbeitung im Partnerpuzzle (4er Tisch)	
b)	Lesen und Skizzieren	EA
c)	Austausch über das Quadratproblem (Schulternachbar), dann gegenüber	2x PA
d)	Entwicklung eines Rollenspiels	GA
e)	Präsentation der Rollenspiele Abschlussreflexion: Für welche Flächenmaße ist das Quadratproblem ein echtes Problem, wann ist es einfach zu lösen?	UG

Mögliche HA: E2a), E2b)

E2 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- lösen das Quadratproblem haptisch-experimentell rückwärts als Halbierung beim Papierfalten (E2a);
- sichern ihre Ergebnisse aus E1 durch tabellarisches Systematisieren (E2b);
- verstehen das Quadrieren rückwärts rechnen als Umkehroperation in der Tabelle (E2c).

E2 Bezug
Nach E1|E1, weiter mit O1.

E2 Vorbereitung/Material
Quadratisch geschnittene Blätter (Faltanleitung als digitales Zusatzmaterial)

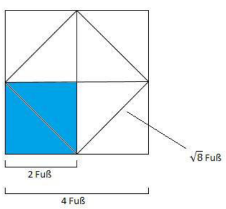
E2 Umsetzungsvorschlag (20 min)

ab)	Als vorbereitende HA	HA
ab)	Partner stellen sich gegenseitig E2a) bzw. E2b) vor und lassen es sich nochmal durch den anderen Partner erklären	PA
c)	Lesen von c), Sammeln von Argumenten	EA
c)	Diskussion im Team	PA/ GA

Mögliche HA: V1, V2 oder O1a)

Intensivzugriff

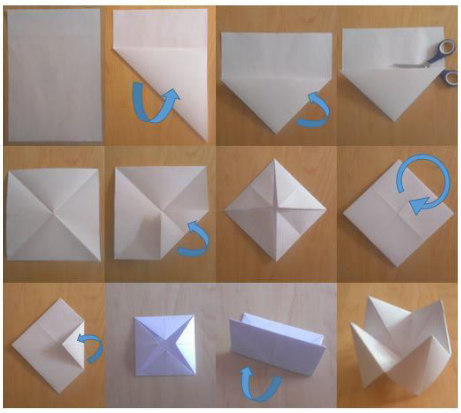
E1 Umsetzungshinweise/Alternativen
Um die historische Dimension wirksam werden zu lassen, wird hier die zeitintensivere Form des Partnerpuzzles vorgeschlagen, die Ressourcen zur Ideensammlung und Darstellung bereitstellt. Bei methodisch knapperer Planung kann E2 als Vertiefung und Sicherung integriert werden.

E1 Hintergrund


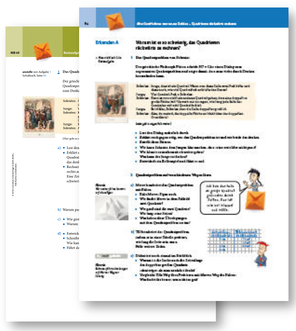
Platon schrieb diesen Dialog auf, um seine Figur Sokrates die Kraft des Denkens zeigen zu lassen. Sokrates führte dazu ein „Experiment“ mit dem Jungen, dem Sklaven Menon, vor. „Zur Lösung verhilft ihm Sokrates, indem er ihn durch Fragen zu Überlegungen anregt, die schließlich zum Verständnis des geometrischen Sachverhalts führen. Dabei legt der Philosoph großen Wert darauf, nicht zu lehren, denn er will zeigen, dass sich der Schüler die Lösung selbst erarbeitet.“ (Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Menon.)

E1|E1 Differenzierung
Leistungsschwächere arbeiten mit der vorstrukturierteren Basisaufgabe E1 (EA/ PA und UG im Wechsel).

E2 Umsetzungshinweise/Alternativen
Verteilen einer Faltanleitung zur Weiterführung und Spielentwicklung („Himmel und Hölle“).



E2 Differenzierung
In leistungsschwächeren Kursen könnte die Lösung Platons anhand eines quadratischen Plakats im Plenum nachgespielt werden.



Erkunden A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

E3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…
- lernen die Tabelle als zentrale Darstellung für die Wurzel-Operation und ihre Umkehroperation intensiver kennen;
- lernen durch Vernetzung zum graphischen Einschachteln das Schätzen von Wurzeln in der Tabelle.

E3 Bezug

Nach **E2** oder nach **O1**, weiter mit **O2**.

E3 Umsetzungsvorschlag (30 min)

a)	Mindestens 15 Minuten Zeit zum Sammeln von Erfahrungen	PA
bc)	Arbeitsteilige Erarbeitung, dann Austausch mit Partner oder Sitzgruppe	PA
	Klärung und Austausch im Plenum	UG

Mögliche HA: **V2**, **V3**, für Stärkere **V4**

E4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…
- schachteln sukzessive ein und erarbeiten so geometrisch und tabellarisch ein Annäherungsverfahren an Wurzeln.

E4 Bezug

V9 und **V10** erleichtert den Zugriff auf die Aufgabe, ggf. zur Differenzierung einsetzen. Weiter mit **O3**.

E4 Umsetzungsvorschlag (20 min)

a)	Ich-Du-Wir-Methode: Vergleichskriterien: Genauigkeit, Länge der Tabelle, Vorgehen in der Schrittfolge	EA/ PA
b)	Vergleiche nochmals in der Gesamtlerngruppe auswerten (Kriterien s.o.) und verschiedene Schrittfolgen beurteilen, sowie Vor- und Nachteile der Tabellenlänge thematisieren	UG

Mögliche HA: **V9** und **V10**, ggf. auch vorgreifend

Intensivzugriff

E3/E4 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Aufgabe **E3** erarbeitet die zentrale Fertigkeit des Schätzens von Wurzeln. Sie nutzt das *einmalige* Einschachteln von Quadraten.
In Aufgabe **E4** wird das Verfahren zum *sukzessive genaueren* Einschachteln fortgeführt.

E3 Erwartungshorizont

An der Tabelle geschätzt wird mit Nachbarschaftsbeziehungen: Die Zahl 8 liegt zwischen den Quadratzahlen 4 und 9, also muss die Wurzel von 8 zwischen 2 und 3 liegen.

Quadrieren

Seitenlänge des Quadrats	Flächeninhalt des Quadrats
1 cm	1 cm²
2 cm	4 cm²
	8 cm²
3 cm	9 cm²
	10 cm²
4 cm	16 cm²
	25 cm²

Quadrieren umgekehrt

E4 Erwartungshorizont

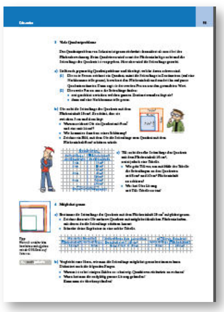
Beim Einschachtelungsverfahren von $\sqrt{20}$ werden die Lernenden nicht unmittelbar gradlinig arbeiten, sondern erst unsystematischer Probieren, bevor sie sukzessive Einschachteln. Eine mögliche Bearbeitung ist in der unten stehenden Tabelle angeboten. Dabei bedeutet „falsch“ dass der rechte Wert unter 20 ist.

E4 Hinweis

Die Untersuchung der eingeschachtelten Quadrate erfolgt (hier oder in **V9**) auch mit Hilfe eines Files eines dynamischen Geometriesystems. Dazu wird ab Jahrgang 9 das DGS Cinderella empfohlen, das online frei herunter ladbar ist (bei Problemen in der Darstellung eine neuere Version herunterladen).

E4 Differenzierung

Da die Aufgaben **V9**, **V10** die Aufgabe **E4** noch genauer anleiten und auch den Rechnereinsatz zur Visualisierung des Zoomens vorsehen, sollten diese gerade den schwächeren als Unterstützung angeboten werden.
Diese können dann das Zoom-Applet zum Einschachteln der ganzen Klasse vorführen, damit auch diejenigen, die zunächst ohne gearbeitet haben, diese Visualisierung sehen und nutzen.



Erkunden A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

E5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- untersuchen die Nachkommastellen von Wurzeln beim Quadrieren und entdecken Muster;
- erkennen, dass die im Taschenrechner-Display angezeigten Dezimalzahlen oft gerundet sind;
- entdecken die Unendlichkeit der Nachkommastellen bestimmter Wurzeln.

E5 Bezug

Wird durch **V11**, **V14** und **V15** vorbereitet, weiter mit **E6**.

E5 Material

Taschenrechner

E5 Umsetzungsvorschlag (30 min)

	Die Lernenden probieren ausgehend von Oles Statement einige Wurzelberechnungen mit dem Taschenrechner aus.	EA
	Impuls: Hinweis auf die Fragestellung: Was meinen Merve und Till eigentlich? – Klärung der Problemstellung	UG
a)	Bearbeitung einiger Multiplikationen (hinreichend Zeit für sich festigende Erfahrungen) Austausch anhand der Rechenbeispiele	EA PA
b)	Nach kurzer EA zu $\sqrt{7}$ Ergebnisreflexion und deutliche Ergebnisformulierung, z.B.: Im TR-Display wird $\sqrt{7}$ nur gerundet angegeben, aber intern mit mehr Nachkommastellen gerechnet.	UG

Mögliche HA: **E6a)**, **E6b)** oder **V16**

E6 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- sortieren Wurzelausdrücke in qualitative Gruppen ein (nicht definierte Wurzeln, Wurzeln aus Quadratzahlen, andere);
- suchen Beispiele für die Gruppen und begründen die Zugehörigkeit.

E6 Bezug

Nach **E5**, weiter mit Systematisierung in **O4**.

E6 Vorbereitung/Material

20-30 Zettelchen pro Lernendenpaar mit Wurzeln von negativen Zahlen, Quadratzahlen, natürliche Zahlen mit irrationalen Wurzeln

E6 Umsetzungsvorschlag (30 min)

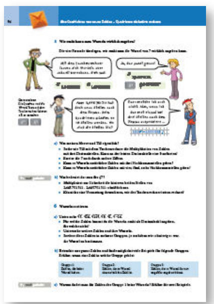
ab)	Untersuchen der Wurzelwerte mit Benennen von Auffälligkeiten; Sortieren der Kärtchen	PA
b)	Präsentieren von Ordnungskriterien im Museumsrundgang und ihre Diskussion	UG
c)	Sichernde Reflexion	UG

Mögliche HA: **O4a)**, **O4b)**, **V18** für die Stärkeren, **V7** für die anderen

Intensivzugriff

E5 Umsetzungshinweise/Alternativen

In **E5** wird der Taschenrechner als gängiges Hilfsmittel zur Wurzelberechnung eingeführt. Auch wenn der Taschenrechner für Wurzeln stets eine endliche Dezimalzahl ausgibt, so haben doch viele unendlich viele Nachkommastellen. Diese Entdeckung können die Lernenden mit dem Taschenrechner machen, denn sie ist der erste, experimentelle Schritt in Richtung Irrationalität.
Dazu müssen sie zunächst erfahren, dass die abgetippte, gerundete Wurzel $\sqrt{7}$ quadriert nicht wieder 7 ergibt. Eine Untersuchung, wie sich die Nachkommastellen verhalten, wird durch **V14** und **V15** vorbereitet.



Erkunden A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

E7 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- erfahren, dass es sich bei Wurzeln in der Regel um Zahlen einer neuen Qualität handelt, die nicht durch noch so ausgefeilte Bruchdarstellungen beschrieben werden können;
- lernen die mathematik-historische Dimension der Erforschung irrationaler Zahlen kennen.

E7 Bezug

Nach **O4**, weiter mit **E8**, wird vertieft für Starke in **E17**.

E7 Umsetzungsvorschlag (20 min)

ab)	Historische Annäherungen an Wurzeln durch Brüche untersuchen	EA
c)	Kann auch als Rechercheaufgabe im Rahmen einer Hausaufgabe, als Kurzreferat oder als Wahlaufgabe (Portfolio, Wochenplan) bearbeitet werden	UG

Mögliche HA: Schreibe als Wissenschaftsjournalist einen Artikel über den spektakulären Fund einer altbabylonischen Steintafel, die die Inschrift $\sqrt{2}$ in altbabylonischer Zahlschreibweise, also im Sechziger- statt Zehnersystem trägt. Um möglichst viele Leser zu erreichen, erklärst du gut verstehbar die Bedeutung der Inschrift.

E8 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- setzen sich vertieft mit dem historischen Kontext zu irrationalen Zahlen auseinander.

E8 Bezug

Nach **E7** und **O5**, wird vertieft für Starke in **E17**.

E8 Umsetzungsvorschlag (15 min)

Wahlaufgabe: Kann als Rechercheaufgabe im Rahmen einer Hausaufgabe oder als Kurzreferat bearbeitet werden	EA
Oder Abschlussreflexion zur Geschichte irrationaler Zahlen eventuell in Verbindung mit **E10**	

Mögliche HA: **V19** oder **V20**

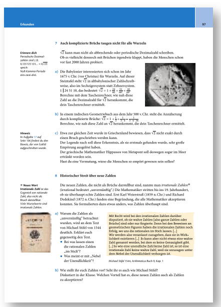
Intensivzugriff

E7/ E8 Umsetzungshinweise/Alternativen

E7 und **E8** greifen den historischen Konflikt auf, den die Zahlbereichserweiterung mit sich brachte. Das Weltbild der Pythagoreer (5. Jhdt. v. Chr.) brach zusammen, da man damals davon ausging, alles sei in Zahlenverhältnissen zu beschreiben.
Aber auch die Babylonier haben sich mit diesem Quadratproblem beschäftigt. Geschichtsinteressierten Lernenden sollte hier die Gelegenheit gegeben werden, mathematik-historische Kontexte zu recherchieren und zu präsentieren.

In **E7ab)** geht es um Approximationsverfahren, deren Systematik von Stärkeren näher betrachtet werden kann und ggf. auf das Zehnersystem übertragen werden kann.
Mit **E7c)** lässt sich das Beweisprinzip eines Widerspruchbeweises thematisieren, ohne in den Bewies im Einzelnen einzusteigen, dies erfolgt nur für unterbeschäftigte Lernende in **V17**.

E8 ermöglicht einen Diskurs in die Zahlbedeutung hinein. Welche Eigenschaften haben „unsere“ Zahlen eigentlich? Was bedeutet Unendlichkeit? – in der Vorstellung und in der Mathematik (Verbindung zu $1 = 9/9 = 0{,}999999\ldots$ herstellen)
Was bleibt bezüglich der begreifbaren Menge dieser neuen Zahlen (Kardinaler Aspekt)? Was bleibt bezüglich der Anordnung, der Größe der Zahl (Ordinaler Aspekt)?



Erkunden B Wie kann ich mit Wurzeln rechnen?

Schnellzugriff

E9 | E9 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- prüfen, welche der ihnen bekannten Rechenregeln auf Wurzelterme übertragbar sind und welche nicht;
- begründen die Gültigkeit/ Nichtgültigkeit der Rechenregeln für Wurzelterme an Beispielen;
- bauen negatives Wissen auf zu falschen Umformungen (z.B. Wurzeln ziehen aus Summen).

E9 | E9 Bezug
Nach **O2** oder **O4**, weiter mit **O6** oder **V22**, **V23**.
Die Basisaufgabe ist deutlich stärker vorstrukturiert, erkundet aber die gleichen Regeln, daher ist eine gemeinsame Besprechung möglich.

E9 | E9 Vorbereitung/Material
Tabelle von **E9** Basisaufgabe als Folienvorlage, Folienstifte

E9 | E9 Umsetzungsvorschlag (40 min)

a) | a)	Annäherung an gültige und nicht gültige Umformungen in Beispielrechnungen	PA
	Herausarbeiten, welche „falsche Regel“ bei den Umformungen genutzt wurde, um das Untersuchen von Regeln zu motivieren	UG
b | bc)	Untersuchen von Regeln – mehr oder weniger vorstrukturiert Basisaufgabe wird auf Folie bearbeitet	PA
| d)	Zeitpuffer für Stärkere. Anwenden auf Beispiele	PA
	Gemeinsame Besprechung im Plenum anhand der Folie der Basisaufgabe	UG

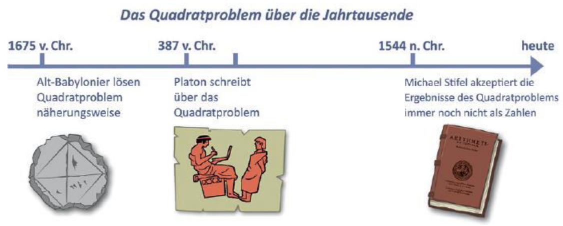
Mögliche HA: V27

E 10 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- verschaffen sich einen Überblick über die historischen Momente, die im Kapitel thematisiert wurden;
- erweitern ihr Verständnis von der Mathematik als historisch gewachsene Disziplin.

E10 Material
Kopiervorlage für Ereignisse zum Ausschneiden im digitalen Material
Großes Plakat oder Papierrolle.

E10 Bezug
Erst nach Ende der Etappe A, d.h. nach **O5**.
Greift **E1**, **E7**, **E8**, **E10**, **V17** auf.
Gut zur Differenzierung nach oben einsetzbar.

E10 Umsetzungsvorschlag (30 min)
Umsetzbar als Portfolio und Wochen-Hausaufgabe mit Ausstellung hinterher

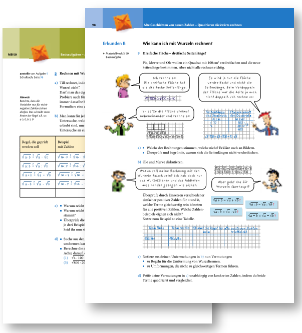


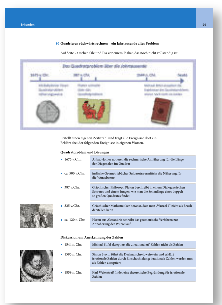
Intensivzugriff

E9 | E9 Umsetzungshinweise/Alternativen
Im Umgang mit Wurzeln machen Lernende viele Fehler. Daher ist der Aufbau negativen Wissens sehr wichtig (Welche Umformung gilt NICHT?). Die eigene Erkundung, welche Regeln gelten und welche nicht, können dazu beitragen, dieses negative Wissen aufzubauen.

$\sqrt{a^2+4}=a+2$

E9 Differenzierung
Damit schwächere Lernende die Aufgabe bearbeiten können, sollten sie sich erinnern: Umformungen zwischen Variablentermen sind ungültig, wenn die Terme nicht gleichwertig sind, also wenn beim Einsetzen von Zahlen unterschiedliche Werte für beide Terme herauskommen.





Ordnen A — Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

O1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- festigen die geometrische Vorstellung, dass Wurzelziehen bedeuten kann, die Länge einer Quadratseite bei vorgegebenem Flächeninhalt zu suchen;
- verstehen Wurzelziehen in der Tabelle als Umkehrung des Quadrierens („quadrieren rückwärts rechnen“);
- können Wurzeln zu einfachen Quadratzahlen angeben.

O1 Bezug

Nach **E1**, **E2**, weiter mit **V6** oder **E3**.

O1 Vorbereitung/Material

Wissensspeicher

O1 Umsetzungsvorschlag (30 min)

ab)	Einzelarbeit oder durch HA vorbereiten	EA/ HA
ab)	Partnerarbeit zum gegenseitigen Erklären	PA
c)	Nutzung der Wurzeltaste sollte im Plenum für alle demonstriert werden.	UG
d)	Wissensspeichereinträge werden anschließend in einem kurzen Plenumsabgleich gesichert.	UG

Mögliche HA: V6

O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler…

- können automatisiert Wurzeln von Quadratzahlen bis 15^2 oder 20^2 angeben;
- schätzen Wurzeln durch Berücksichtigung von Nachbarbeziehungen;
- erklären den Abschätzungsprozess mit eigenen Worten.

O2 Bezug

Nach **E3**, geübt mit **V2**, **V3**. Danach weiter mit **E4** bzw. **E9** (wenn auf Einschachteln verzichtet wird).

O2 Umsetzungsvorschlag (30 min ohne d))

a)	Paarduell: Wer hat als erstes seine sechs Ergebnisse?	EA
	Vergleich mit Partner und Erklärung des Vorgehens, ggf. optimieren	PA
b)	Vorgehen verschriftlichen	EA
	Exemplarisch eine Lösung diskutieren (Was ist gelungen, wie zu optimieren?)	UG
c)	Austausch der Formulierungen und Partnerfeedback	PA
d)	Automatisieren in die HA verlagern	HA
	Nächste Stunde: Gegenseitiges Abfragen	PA

Mögliche HA: O2d) und **V2**, **V3**

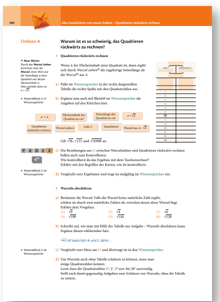
Intensivzugriff

O1 Umsetzungshinweise

Für den Umgang mit dem Taschenrechner kann sich an 1c) eine Partnerarbeit zur Ausweitung anschließen, etwa: „Stelle deinem Partner im Wechsel eine Wurzelaufgabe wie in 1b). Löse, wenn möglich ohne Taschenrechner, wo es nicht geht unter Benutzung des Taschenrechner.“

O2 Umsetzungshinweise

2a) und weitere Aufgaben der gleichen Form können auch im Zahlendiktat trainiert werden.
Wichtig ist bei der Bearbeitung der Problemstellung aus 2a), dass die Lernenden ihr Vorgehen schrittweise mental vom Hilfsmittel der Tabelle lösen („Tabelle im Kopf“).
In 2b) dagegen ist die Bezugnahme zur Tabelle sehr wichtig.
Das Automatisieren der Quadratahlen ist eine wichtige Voraussetzung zum Abschätzen, sobald man die Tabelle nicht mehr vor Augen hat. Es sollte daher wiederholt in der Klasse abgefragt werden, damit es genügend Nachdruck bekommt. Auch Schätzaufgaben bis 400 sind gute Anlässe zum Automatisieren.



Ordnen A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

O3 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- festigen, wie sich die Zahl $\sqrt{a}$ durch quadratische Einschachtelungen immer präziser annähern lässt;
- können Wurzelzahlen ordinal verorten.

O3 Bezug
Nach **E4** oder **V10**, vertiefbar für Stärkere durch **V12**.

O3 Vorbereitung/Material
Wissensspeicher

O3 Umsetzungsvorschlag (45 min)

a)	Lernende, die zuvor **E4** bearbeitet haben, könnten in einer Differenzierungsphase a) als Vortrag in EA vorbereiten und sich darüber absprechen (zur Sicherung).	EA
	Sind es wenig Vorbereitete, so kann eine Präsentation des Verfahrens im Plenum durch die Lernenden geschehen. Sind es mehrere, können Kleingruppen gebildet werden, in der jede/r Vorbereitete eine Gruppe von 2-4 informiert.	UG oder GA
b)	Jeder führt die Prozedur durch und füllt den Wissensspeicher aus.	EA
c)	Erklären in PA	PA
de)	Bearbeiten in EA oder PA	EA/ PA
	Plenum: Begriffsklärung „Einschachteln“	UG

Mögliche HA: endgültiger Eintrag des Wissensspeichers oder **V10**

O4 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- wissen, dass viele Wurzeldarstellungen (etwa $\sqrt{200}$) Zahlen „neuer Qualität“ bilden, die nicht durch endliche Einschachtelungsprozesse zu beschreiben sind;
- können Wurzelausdrücke in drei Kerngruppen von Zahlen strukturieren.

O4 Bezug
Nach **E6** oder **E6/E7**, weiter mit **E7** oder **O5**.

O4 Vorbereitung/Material
Kärtchen mit Bezeichnungen, Beschreibungen und Zahlenkärtchen, Wissensspeicher

O4 Umsetzungsvorschlag (25 min)

a)	Kärtchen vorbereiten mit Bezeichnungen, Beschreibungen und mind. 10 Zahlenkärtchen in EA zuordnen lassen, Vergleich in PA (falls nicht schon in E6 erfolgt)	EA
b)	Andenken in PA, dann gemeinsam	PA, UG
ab)	Sicherung im Plenum mit obigen Kärtchen an Tafel oder Folienapplikationen am OHP durch Lernenden	UG
c)	Eintrag in den Wissensspeicher	EA

Mögliche HA: starten mit **O5** oder **E7**

Intensivzugriff

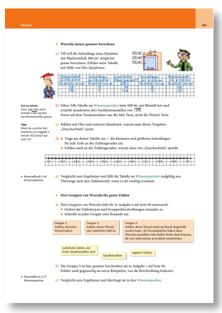
O3 Umsetzungshinweise
Entscheidend für das Gelingen des Einschachtelungsverfahrens und der Erkenntnis der neuen Qualität irrationaler Zahlen ist es, dass die Logik der Einschachtelungsmethode von allen Lernenden verstanden ist.
Dies gilt es diagnostisch sicher zu stellen, indem es mehrfach verbalisiert wird im Klassengespräch oder einzeln verschriftlicht.

Ansonsten ist das Ergebnis möglichst vielfältiger Lösungswege erwünscht, die in Teilgruppen und in der Gesamtlerngruppe nebeneinandergestellt und gewürdigt werden.

Hier lassen sich strategische Aspekte, aber auch Genauigkeitsfragen gut herausarbeiten.

O3 Differenzierung
Besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können zusätzlich mit dem Heronverfahren in **V12** arbeiten, um auch hieran das Gemeinsame des Einschachtelungs-Prinzips und die besonders geschickte Strategie zu diskutieren.

O4 Umsetzungshinweise
Mit **O4** und **O5** wird die strukturmathematisch wichtige Ebene des Kapitels thematisiert, die Zahlbereichserweiterung.



Ordnen A Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?

Schnellzugriff

O5 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- wiederholen die Zahlbereiche der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen aus Klasse 7 (Beispiele, Eigenschaften und Beziehungen);
- lernen den neuen Zahlenbereich der irrationalen Zahlen über eine Teilgruppe von Wurzeln kennen;
- systematisieren die Zahlbereiche als Ober- und Untermengen;
- können die Zahlbereiche mathematisch beschreiben und in den ihnen bekannten Zahlenraum einordnen.

O5 Bezug
Nach **E7** oder in der vereinfachten Variante nach **O4**, weiter mit **V19-V21**.

O5 Vorbereitung/Material
Wissensspeicher

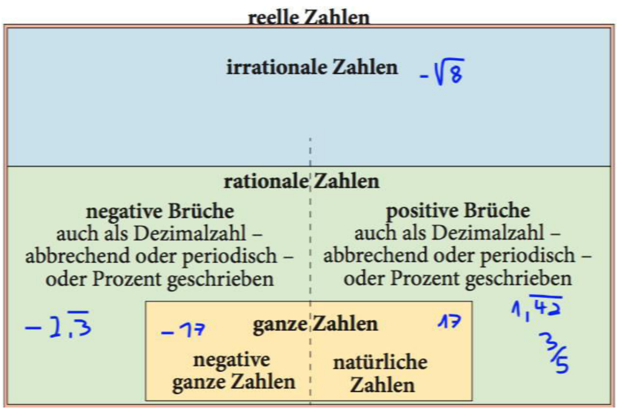
O5 Umsetzungsvorschlag (30 min)

ab)	Erarbeitung in Einzelarbeit, dann Kontrolle mit Partner	EA, PA
c)	Bearbeitung in PA, danach Tafelzeichnung (zur Sicherung) einer hierarchischen Darstellung der Begriffe und Zuordnung der Beispiele und Formulierung von Aussagen.	PA UG
d)	Als schriftliche Sicherung im Wissensspeicher	UG, EA

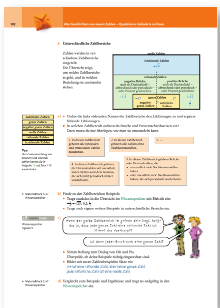
Mögliche HA: V19 oder **V20**

Intensivzugriff

O5 Umsetzungshinweise
Mit **O5** wird die in mehreren Schritten angebahnte Zahlbereichserweiterung explizit thematisiert und die Zahlbereiche alle noch einmal benannt.



O5 Differenzierung
V17-V19 stellen ein Ergänzungsangebot dar, um hier je nach zeitlichen Möglichkeiten als auch nach abstrakten Interessen der Lerngruppe oder auch einzelner Lernender zu ergänzen und zu vertiefen.
V20-V21 kann demgegenüber als Trainings- und Sicherungsmöglichkeit auf dem Regelniveau genutzt werden.



Ordnen B Wie kann man mit Wurzeln rechnen?

Schnellzugriff

O6 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- systematisieren, welche der ihnen bekannten algebraischen Regeln analog auf Wurzelterme angewandt werden dürfen und welche nicht;
- bauen explizit negatives Wissen zu falschen Umformungen auf.

O6 Bezug
Nach **E9|E9**, weiter mit Üben **V22-V29** besser erst nach **O7**, ggf. auch mit Variablen **V30-V32**.

O6 Vorbereitung/Material
Wissensspeicher

O6 Umsetzungsvorschlag im Unterricht (60min)

ab)	Mit der Methode Ich-Du-Wir überprüft zunächst jeder einzeln, ob er seine Erkundungsergebnisse aus **E9|E9** auf die neuen Zahlen übertragen kann, dann Explizierung und Vergleich.	EA/ PA/ UG
c)	Im Plenum (erst Museumsgang) werden Lernplakate geprüft. Abschließend erfolgt die Übertragung in den Wissensspeicher.	UG/ EA
d)	Die Teilaufgabe stellt eine Wiederaufnahme mit Hilfe der Aufgabe **E9d)** dar. Könnte als Expertenpräsentation im Plenum präsentiert werden.	

Mögliche HA: V27, V26

O7 Ziele
Die Schülerinnen und Schüler…
- verstehen das Zustandekommen der Displayausgaben des Taschenrechners und können ggf. (falls der eigene Taschenrechner dies ermöglicht) wechseln zwischen Darstellungen.

O6 Vorbereitung/Material
Taschenrechner, ggf. Dokumentenkamera oder anderen Projektor

O6 Bezug
Nach **O6**, weiter mit Vertiefen **V22-V29**, insbesondere **V23**.

O7 Umsetzungsvorschlag (10 min)

ab)	Erarbeitung	PA
	Besprechung und Vergleich im Plenum	UG
c)	Demonstration ggf. an der Dokumentenkamera, falls einheitliche Taschenrechner eingeführt sind, ansonsten Schrittfolge als Tastenangabe an Tafel durch Lernenden vorstellen lassen.	

Mögliche HA: V23

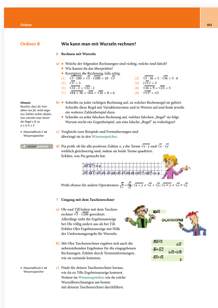
Intensivzugriff

O6 Umsetzungshinweise
Die Aufgabe systematisiert und dient der Festigung von **E9|E9** und sollte daher eng auf diese Aufgabe folgen. Das Umgehen mit den Wurzeltermen erfordert aber eine weitere Festigung durch Training. Deshalb sollten sich an die Bearbeitung unmittelbar Vertiefungsaufgaben **V25-V27** anschließen.

O6 Differenzierung
Zeitpuffer: Schnellere Lernende könnten aufgefordert werden noch weitere richtige und falsche Wurzelumformungen für die Mitschüler zu erfinden. Sie könnten auch die Lernplakate zu den Rechenregeln so ergänzend ausgestalten (Beispiele, Regel, falsche Regel), dass sie im Klassenraum ausgehängt werden können.

O7 Umsetzungshinweise
Intendiert ist hier nicht, dass die Lernenden jede Displayangabe durch Termumformung zurückverfolgen, aber dass sie verstehen, wie diese Displayangaben zustande kommen und sie exemplarisch nachvollziehen.
Diese Sensibilisierung für die Fehleranfälligkeit durch verschiedene Bedienfehler fördert letztlich den kompetenten Umgang mit dem Werkzeug Taschenrechner. In dem Kontext können weitere Bedienfehler wiederholt werden.

Weitere mögliche Hausaufgabe: „Schreibe als Tastenfolge auf, wie du deinen Taschenrechner richtig mit dem Speicher benutzen kannst.“



Vertiefen 1 Wurzeln ermitteln und schätzen

Hintergrund	Die Schülerinnen und Schüler sichern ihr Grundverständnis von Wurzeln als Quadrieren rückwärts am Quadrat (**V1-V4**, **V6**) und ohne geometrische Deutung (**V5**). Die Aufgabe **V7** ermöglicht die Einordnung der Wurzel auf dem Zahlenstrahl, die Aufgabe **V8** betrachtet die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion. Entscheidend ist dabei die Fertigkeit des Wurzel Abschätzens, für die die Tabelle als Denkhilfe dient. Sie wird geübt in **V2**, **V3** und **V8**.

V1 Ziel: Wurzeln in Tabellen im Zusammenhang erfahren und durch Ausprobieren annähern

Dauer 30 min

Material Eventuell DIN-A3-Blätter zum Messen. Sonst reicht es auch, die Maße vorzugeben.

Bezug Knüpft an Kapitel Skalierungen an, mit der **E2** vertieft wird. Leichter nach **O2**. Dann als **HA** geeignet.

Hinweise Lernende nähern sich der Lösung in **a)** schrittweise an. Gewünschte Genauigkeit wird zuvor vereinbart.

Lernwege *Differenzierung*: Schnellere Lernende können die Ergebnisse aus **a)** und **c)** genauer bestimmen oder sich überlegen, welche Seitenlängen und Faktoren für eine vierfache oder zwölffache Fläche eingestellt werden müssen. Langsamere Schüler lösen **c)** nur für einen Faktor.

V2 Ziel: Wurzeln veranschaulichen und abschätzen, Quadratzahlen auswendig lernen

Dauer 20 min

Bezug Wiederholung aus Kapitel Flächenformeln. Nach **O1**, nach **E2**, spätestens vor **E4**. Als **HA** geeignet.

Hinweise Quadratzahlen bis 25 werden in einer Liste aufgeschrieben. Auf diese Liste sollte immer wieder zurückgegriffen werden können, bis die Zahlen auswendig gelernt wurden.

Lernwege Die Lernenden können **b)** fast vollständig mit Hilfe der Liste aus **a)** lösen. Auch bei **c)** hilft die Liste herauszufinden, zwischen welchen ganzen Zahlen sich die Wurzeln befinden. Die Lernenden lernen dadurch den Gebrauch von bekannten Werten, um unbekannte Werte zu schätzen.

Basisaufgabe **V2** Ziel: Wurzeln und Quadratzahlen veranschaulichen, Quadratzahlen auswendig lernen

Dauer 20 min

Bezug Nach **O1**, nach **E2**. Als **HA** geeignet.

Hinweise Die Basisaufgabe erarbeitet ähnliche Inhalte mit etwas mehr Anleitung wie **V2**.
Auf Wunsch kann die Quadratfolge auch zeichnerisch weitergeführt werden. Wie bei **V2** kann auf die erstellte Liste immer wieder zurückgegriffen werden, bis die Zahlen auswendig gelernt wurden.

Lernwege **c)** lässt sich mit der Liste aus **a)** lösen. Die Basisaufgabe bietet eine gute Veranschaulichung der Quadratzahlen und ihres nichtlinearen Wachstums.

V3 Ziel: Quadratzahlen erkennen und Wurzeln schätzen

Dauer 10 min

Bezug Nach **E2**, **O2** und **V2**. Als **HA** geeignet.

Hinweise **a)** kann größtenteils mit der Liste aus **V2** gelöst werden.

Lernwege Während **a)** fast ausschließlich Wiederholung ist, wird in **b)** eine Regel formuliert, wann sich die Quadratzahlen aus der Liste auch bei größeren Zahlen anwenden lassen und wann nicht. Zum Finden der Regel werden die meisten Lernenden zu diesem Zeitpunkt ausprobieren müssen.

V4 Ziel: Größenverhältnisse mit Quadraten bestimmen und Wurzeln schätzen

Dauer 15 min (oder 45 min, wenn **c)** als Miniprojekt)

Bezug Nach **E2** und **O2**.

Hinweise Eventuell muss der Umgang mit Maßstäben vor der Aufgabe aktiviert oder kurz wiederholt werden.

Lernwege Die Aufgabe beschreibt, wie schwer vergleichbare Größen anschaulich verglichen werden können und regt die Lernenden an, sich über Darstellungsformen Gedanken zu machen. So wird das Quadrieren rückwärts im Anwendungszusammenhang geübt. Miniprojekt **c)**: arbeitsteilige GA nach Ländern: Recherche zu ausgewählten Länderdaten, Plakaterstellung mit verschiedenen Darstellungsformen ergänzend zur Quadratdarstellung.

V5 Ziel: Struktur der Ziffern von Wurzeln untersuchen

Dauer 25 min

Bezug Nach **E2**, **O2** und **V2**. Vorbereitung für **V16**. Als **HA** geeignet.

Hinweise **a)** kann größtenteils mit der Liste aus **V2** gelöst werden. Die Liste kann hier bis 30 ergänzt werden.

Lernwege Aus bekannten Quadratzahlen sollen die Lernenden Vermutungen schlussfolgern, wie man erkennt, ob Zahlen Quadratzahlen sein können. In **b)** wird dieses Wissen an Beispielen erprobt und in **c)** werden Aussagen über die Anzahl der Stellen von Quadratzahlen und ihren Wurzeln gemacht. Auch hier ist (gezieltes) Ausprobieren die zentrale Strategie. Die Untersuchung ist geeignet als Vorbereitung für den Beweis der Irrationalität über die Endziffern (in **V16**).

Basisaufgabe V5 Ziel: Endziffern von Quadratzahlen und Anzahl ihrer Stellen untersuchen

Dauer 25 min

Bezug Nach **E2**, **O2** und **V2**. Bis auf Austausch mit Partnern als **HA** geeignet.

Hinweise Die Tabellen in **a)** können die Lernenden auswendig oder übernehmen sie aus vorherigen Aufgaben.

Lernwege Durch Ausprobieren entdecken die Lernenden, welche Endziffern bei Quadratzahlen auftreten können und entdecken Regelmäßigkeiten bei den Stellenanzahlen von Zahlen und ihren Quadraten.

V6 Ziel: Fachsprache reflektieren und einüben

Dauer 25 min

Bezug Nach **E2** und **O2**.

Hinweise Vertiefung des Verständnisses und Konsolidierung des Erklärens. Erfordert genaues Hinschauen, was durch den Vergleich angeregt wird; Austausch über Erklärungsbilder in PA.

V7 Ziel: Einordnung der Wurzeln als feste Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Dauer 20 min

Bezug Nach **E3** und **O2**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise An vielen Stellen sind ggf. Hilfestellungen nötig (auf **E2** hinweisen als Modell) nötig. Es können auch Teilaufgaben im Klassengespräch behandelt werden. **e)** im Plenumsgespräch sichern.

Lernwege Thematisiert wird ein anschauliches Verfahren, um Wurzeln auf den Zahlenstrahl zu projizieren. Dazu wird das Verfahren in **a)** und **b)** zunächst analysiert und soll dann in **c)** und **d)** selbst angewendet werden. In **e)** soll mit Hilfe des Verfahrens ein Bezug zwischen Wurzeln und dem Zahlenstrahl hergestellt werden, die dem Verständnis der Zahlengerade als Veranschaulichung aller reeller Zahlen dient.

V8 Ziel: Kennenlernen der Wurzelfunktion und Umgang mit Taschenrechner

Dauer 20 min (25 min ohne TR)

Material Taschenrechner (ohne TR arbeitsteilig).

Bezug Nach **E3**, **O2** eventuell nach **O7**. Als **HA** geeignet.

Hinweise Entscheidend ist eine funktionale Sicht auf das Wurzelziehen als Umkehr des Quadrierens. Dies erlaubt die Verstetigung und damit das Finden von Zwischenwerten.

Lernwege Je nach Zeitpunkt der Bearbeitung üben die Lernenden das Annähern von Wurzeln durch (gezieltes) Ausprobieren oder den Umgang mit dem Taschenrechner. Der Graph der Wurzelfunktion kann helfen, den Zusammenhang zwischen Wurzeln und ihren Quadraten zu veranschaulichen und Wurzeln von beliebigen Zahlen zwischen 0 und 10 zu schätzen. Ein Beispiel dafür liefert **d)**.

Basisaufgabe V8 Ziel: Kennenlernen der Wurzelfunktion und Umgang mit Taschenrechner

Dauer 15 min

Material Taschenrechner

Bezug Nach **E3**, **O2**, eventuell nach **O7**. Als **HA** geeignet.

Hinweise Mit den Lernenden abklären, welche Abweichungen beim Ablesen in Ordnung sind.

Lernwege Die Lernenden lernen die Wurzelfunktion kennen und üben das Lesen von Funktionsgraphen, ohne die Tragweite des Konzepts Umkehrfunktion vollständig erfassen zu müssen.

Vertiefen 2 Wurzeln annähern

Hintergrund	In den Aufgaben **V9-V13** lernen die Schülerinnen und Schüler konkrete Verfahren anzuwenden, um Wurzeln schrittweise anzunähern. Aufgabe **V9-V11** vertiefen das im Erkunden und Ordnen thematisierte. Die Aufgaben **V12** und **V13** erweitern es auch um andere Annäherungsverfahren und gehen über den Pflichtstoff hinaus. Diese Vertiefeneinheit kann im Basisweg ggf. ausgelassen werden.

V9 Ziel: Bedeutung des Einschachtelns veranschaulichen

Dauer 30 min

Material Ideal pro zwei Lernende ein Computer mit dem Applet zum Einschachteln (mit Cinderella oder Java)

Bezug Unterstützt die Aufgabe **E4**, evtl. vor **E4** bearbeiten. Im Basisweg ggf. auslassen.

Lernwege Die Lernenden erhalten hier eine Idee des Einschachtelns. Durch das Applet ist das Verfahren sehr anschaulich und interaktiv. Aufgabe **V10** strukturiert das Vorgehen durch die Tabelle.

V10 Ziel: Einschachteln lernen

Dauer 30-40 min (je nach Genauigkeit und Hilfsmittel)

Material Taschenrechner oder Computer mit Applet aus **V9**.

Bezug Nach **E4** oder unterstützend zu **E4** und **O3**. Nach **V9**. Mit Vorbesprechung eventuell als **HA** geeignet. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise Zu besprechen ist, was in der Spalte „Ermittelter Näherungswert“ stehen muss, da dies aus den Tabellen der Aufgabenstellung nicht ersichtlich ist. Lernende wählen evtl. in einer Zeile zwei zu große bzw. zu kleine Werte. Ggf. sollte ein solcher Fall vor der Klasse besprochen werden.

Lernwege Das Verfahren Einschachteln wird selbstständig durchgeführt. In **b)** muss das Verfahren verstanden worden sein, um auf die Lösung zu kommen.

V11 Ziel: Umgang mit dem Taschenrechner üben

Dauer 15 min

Bezug Nach **E4** und **O3**. Vor **E5**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise Hier brauchen die Lernenden keine eigenen Taschenrechner. Es sollte beim letzten Teil von **b)** darauf geachtet werden, dass die Lernenden mit dem Einschachteln nicht von vorne beginnen, sondern die gegebenen Informationen benutzen.

Lernwege Die Lernenden können hier verstehen, wie der Taschenrechner mit nicht-abbrechenden Zahlen umgeht und wiederholen das Einschachteln.

V12 Ziel: Alternatives Annäherungsverfahren kennenlernen

Dauer 45 min

Bezug Nach **E4** und **O3**. Nach **V9** und **V10**. „Weiter-gedacht“ als Differenzierungsangebot nach oben.

Hinweise Die Analyse des Verfahrens sollte in Partnerarbeit erfolgen. Vor der Bearbeitung von **b)** sollte das Verfahren besprochen werden.

Lernwege Die Lernenden lernen ein alternatives Verfahren zum Einschachteln kennen und vergleichen die Vorgehensweisen. Stärkere Lernende können entweder Hilfestellungen für schwächere Lernende leisten oder das Ergebnis aus **b)** genauer bestimmen. Eventuell noch weitere Wurzeln zur Festigung ermitteln lassen (ggf. auch als **HA**).

V13 Ziel: Heron-Verfahren anwenden, um mit Tabellenkalkulation Wurzeln zu bestimmen

Dauer 10 min (ohne **d)**); 45 min (mit **d)**)

Material Idealerweise pro zwei Lernende ein Computer mit Tabellenkalkulation (nur nötig in **d)**, ggf. als **HA**

Bezug Nach **V12**. „Weiter-gedacht“ als Differenzierungsangebot nach oben oder zum Wachhalten der Werkzeugkompetenz mit Tabellenkalkulation. **a)-c)** in der Schule, dann **d)** als **HA** am Computern.

Hinweise Die Aufgabe kann nur sinnvoll bearbeiten, wer das Heron-Verfahren verstanden hat.
In **a)**, **b)** und **c)** analysieren die Lernenden die gegebene Liste. Die Erkenntnisse bei diesen Teilaufgaben helfen bei der Bearbeitung von **d)**.

Vertiefen 3 Wurzeln, Brüche und Dezimalzahlen

Hintergrund	Die Untersuchung der Dezimalzahlen und Wurzeln von Dezimalzahlen ist Voraussetzung dafür, die Irrationalität vieler Wurzeln zu verstehen. Dieser klassische gymnasiale Schulstoff wird in dieser Vertiefeneinheit durchgearbeitet, spielt aber nicht in allen Schulcurricula für den Mittleren Schulabschluss eine prominente Rolle. Die Vertiefeneinheit kann im Basisweg ggf. ausgelassen werden. Für diejenigen Lernenden, die die Irrationalität erfassen sollen, bieten die Aufgabenfolge **V14-V17** dazu einen Lernweg, **V18** wiederholt Zusammenhänge zwischen Brüchen und Dezimalzahlen aus Klasse 7.

V14 Ziel: Quadratzahlen zwischen großen Zahlen finden

Dauer 20 min

Bezug Nach **E5**. Vor oder nach **O4**.

Hinweise **a)** wird schrittweise angeleitet, ggf. sollte **a)** vor der Bearbeitung von **b)** besprochen werden.

Lernwege Die Lernenden bekommen Merves Strategie vorgestellt, leicht große Quadratzahlen zu finden, ohne aus jeder Zahl einzeln die Wurzel zu ziehen. Weiterhin entwickeln sie in **a)** ein Gefühl dafür, wie groß die Abstände zwischen Quadratzahlen werden, indem sie eigene Schätzungen abgeben und reflektieren. In **b)** wird eine Reproduktion des in **a)** gelernten Vorgehens verlangt.

V15 Ziel: Vorbereiten der Begründung, dass gewisse Dezimalzahlen nicht abbrechen

Dauer 10 min

Bezug Nach **E5**. Vor **V16**. Vor oder nach **O4**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Lernwege Die Lernenden bekommen eine erste Idee davon, wie Quadrate von nicht-abbrechenden Dezimalzahlen aussehen. Im Idealfall erkennen sie, dass die Ziffer 0 als letzte Stelle nie vorkommt und dass sich die Anzahl der Nachkommastellen erhöht (genauer: verdoppelt).

V16 Ziel: Erkennen, wie Wurzeln von natürlichen Zahlen aussehen können und begründen

Dauer 30 min

Bezug Nach **E5**. Vor oder nach **E6**. Nach **V15**. Vor oder nach **O4**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise Die Arbeit mit Partnern oder in Kleingruppen bietet sich an. Die Ergebnisse und vor allem die Schlussfolgerung in **e)** sollten mit der Klasse gemeinsam diskutiert werden.

Lernwege Die Lernenden sollen erkennen, dass abbrechende Dezimalzahlen, die mindestens eine Nachkommastelle ungleich 0 besitzen, quadriert keine ganzen Zahlen ergeben können. Um dies zu erkennen, werden **a)**, **b)**, **c)** und **d)** bearbeitet. In **e)** soll daraus geschlussfolgert werden, dass Wurzeln von natürlichen Zahlen keine oder unendlich viele Nachkommastellen besitzen.

V17 Ziel: Verstehen des Beweises, dass Wurzel aus 2 nicht als Bruch darstellbar ist

Dauer 25 min

Bezug Nach **E5**, **E6**, vor **E8**. Nach **O4**. Im Basisweg ggf. auslassen, vor allem für stärkere Lernende geeignet.

Hinweise Anspruchsvolle Aufgabe, für die Lernenden eine Vorstellung von Primfaktorzerlegung brauchen und indirekte Argumentation nachvollziehen müssen.

Lernwege Die Lernenden gehen den Beweis schrittweise durch und erklären sich gegenseitig die Schritte. **b)** zielt auf das entscheidende Argument des Beweises: Für $\sqrt{4}$ funktioniert der Beweis nicht, denn dann käme man im zweiten Satz zur Gleichung $4n^2=m^2$. Wenn man beide Seiten nun in Primfaktoren zerlegt, dann entsteht kein Widerspruch, denn die 4 kann man in $2 \cdot 2$ zerlegen, womit der Faktor 2 doppelt vorkäme.

V18 Ziel: Umwandeln von Brüchen in (insb. periodische) Dezimalzahlen und umgekehrt

Dauer 30 min

Material Wissensspeicher *Rationale Zahlen 2 und 3* aus Klasse 7

Bezug Nach **E5**, **E6**, vor **E8**. Nach **O4**. **a)**, **b)** eventuell als **HA** geeignet. Im Basisweg ggf. auslassen.

Lernwege **a)** und **b)** sollten eine Wiederholung darstellen, die die übrigen Teilaufgaben vorbereiten. In **c)** lernen die Schülerinnen und Schüler eine Methode kennen, bestimmte periodische Dezimalzahlen in Brüche umzuwandeln. Dabei erklären die Lernenden sich das Verfahren idealerweise gegenseitig, wodurch eine Selbstdifferenzierung stattfindet. In **e)** wird der Zahlbereich der irrationalen Zahlen abgegrenzt.

Vertiefen 4 Irrationale und rationale Zahlen

Hintergrund	Die Vertiefeneinheit kann im Basisweg ggf. ausgelassen werden. Für diejenigen, die die Inhalte lernen sollen, bieten die Aufgaben **V19-V21** eine Gelegenheit, die neuen Zahlbereiche kennenzulernen und in Beziehung zu den bekannten Zahlbereichen setzen. **V20** und **V21** üben, Zahlen verschiedenen Bereichen zuzuordnen.

V19 Ziel: Entscheiden, wann Zahlen rational, irrational bzw. reell sind

Dauer 35 min

Bezug Nach **E7**, vor oder nach **E8**. Nach **O5**. Nach **V18**. Im Basisweg ggf. auslassen. **b)** bietet sich für starke Lernende als Differenzierungsaufgabe an.

Hinweise Hier sollte darauf geachtet werden, dass die Lernenden irrationale und rationale Zahlen präzise trennen können. Deswegen sollte genau auf die Argumentation geachtet werden. Die Zahl 0,16666… kann die Lernenden vor ein Problem stellen, wenn sie die Zahl nicht als $\frac{1}{6}$ erkennen, da sie einen nicht-periodischen Teil besitzt und solche Zahlen nicht in **V18** behandelt wurden.

Lernwege **a)** ist eine gute Aufgabe, um den Lernenden den Unterschied zwischen irrationalen und rationalen Dezimalzahlen zu verdeutlichen. In **c)** werden die Ergebnisse gemeinsam reflektiert.

V20 Ziel: Verstehen wie Zahlbereiche zusammenhängen und Zahlen darin einordnen

Dauer 15-25 min

Bezug Nach **E7**, vor oder nach **E8**. Nach **O5**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise Die Lernenden sollen selbst ein Bild wie in der Aufgabe zeichnen. Es sollte darauf geachtet werden, dass die Bilder der Lernenden die Zahlbereiche sauber trennen und die Zusammenhänge korrekt reflektieren.

Lernwege In dieser Aufgabe wird der neue Zahlbereich in Kontext zu den bereits bekannten Zahlbereichen gesetzt. Durch das Bild geschieht dies auf eine anschauliche Weise. Anschließend Üben die Lernenden in **a)** und **b)** das Einordnen verschiedenster Zahlen in die jeweiligen Bereiche.

V21 Ziel: Spielerisch üben mit Zahlbereichen umzugehen

Dauer 20 min

Material Zwei sechsseitige Spielwürfel für je zwei Lernende

Bezug Nach **E7**, vor oder nach **E8**. Nach **O5**. Nach **V20**. Im Basisweg ggf. auslassen.

Hinweise Neu ist das Begründen, warum es für gewisse Konstellationen keine Zahlen gibt.
Diese Fälle sollten gegebenenfalls im Anschluss vor der Klasse besprochen werden.

Lernwege Die Lernenden üben spielerisch den Umgang mit Zahlbereichen und festigen die Vorstellung, welche Zahlbereiche wie zusammenhängen.

Vertiefen 5 Mit Wurzeln rechnen

Hintergrund	Das Rechnen mit Wurzeln ist für alle Lernenden wichtig, daher werden die erarbeiteten Rechenregeln in dieser Vertiefeneinheit mit den Aufgaben **V22-V29** angewandt und eintrainiert. **V22-V25** nutzen die Rechenregeln für das geschickte Umgehen mit Wurzeln. **V26** thematisiert typische Fehler. In **V27-V28** werden die Rechenregeln produktiv geübt. **V29** übt in einem für Lernende interessanten Anwendungszusammenhang. Diese Vertiefeneinheit ist auch für den Basisweg wichtig und wird durch 4 Basisaufgaben gestützt (**V22**, **V24**, **V28**, **V29**). Die Schwächeren können daran bereits arbeiten, während die anderen noch mit Zahlbereichen beschäftigt sind.

V22 Ziel: Regel für Multiplikation von Wurzeln kennenlernen

Dauer 10 min
Material Taschenrechner
Bezug Nach **E9**, vor **O6**.
Hinweise Eventuell empfinden manche Lernende die Regel als offensichtlich. Dass sie es nicht ist, kann ggf. mit einem Gegenbeispiel (einer Addition etwa) gezeigt werden (siehe auch Basisaufgabe **V22**).
Lernwege Die Lernenden erfahren die Regel zum Multiplizieren von Wurzeln für geschicktes Rechnen.

Basisaufgabe V22 Ziel: Regeln für Multiplikation und Division von Wurzeln kennenlernen

Dauer 25 min
Bezug Nach **E9**, vor **O6**.
Hinweise Falls bei **c)** Schwierigkeiten auftreten, evtl. Ansatz vorgeben. **d)** evtl. mit der Klasse gemeinsam besprechen.
Lernwege Die Schülerinnen und Schüler erfahren die Regeln zum Multiplizieren bzw. Dividieren von Wurzeln.

V23 Ziel: Wurzeln mit der Multiplikationsregel vereinfachen

Dauer 15 min
Material Taschenrechner
Bezug Nach **E9**, vor **O6**. Nach **V22|V22**.
Hinweise Wenn die Lernenden nicht weiter wissen, kann es helfen, zu erwähnen, dass die Multiplikationsregel aus **V22** rückwärts benutzt werden muss.
Lernwege Die Schülerinnen und Schüler erfahren, wie Wurzeln vereinfacht werden und wieso dies geht.

V24 Ziel: Wurzeln von Brüchen bestimmen

Dauer 25 min
Material Taschenrechner
Bezug Nach **E9**, vor oder nach **O6**. Nach **V22|V22** und **V23**.
Hinweise Die Regel wie man Wurzeln aus Brüchen zieht, kann hier auch noch exakter als bei Till aus der Multiplikationsregel gefolgert werden. Bei **b)** bietet sich ein Vergleich zu **V4b)** an.
Lernwege In **a)** erfahren die Lernenden, wie man aus Brüchen Wurzeln zieht. In **b)** erkunden die Lernenden, wann man die Wurzeln aus Dezimalzahlen auf einfache Quadratzahlen zurückführen kann. In **c)** wird die Idee aus **b)** erneut abgefragt und in **d)** wird ein Gegenbeispiel dafür aufgezeigt, dass die Addition von Wurzeln nicht wie die Multiplikation funktioniert. Dass die Regel für die Multiplikation hier fälschlicherweise auf die Addition übergeneralisiert wurde, sollte explizit erwähnt werden, wenn die Lernenden es nicht selbstständig erkennen.
Differenzierung: **d)** bzw. die Erklärung in **d)** kann als Differenzierungsaufgabe genutzt werden.

Basisaufgabe V24 Ziel: Wurzeln durch Zerlegen abschätzen

Dauer 25 min
Bezug Nach **E9**, vor oder nach **O6**. Nach **V22|V22** und **V23**.
Hinweise Beispiel ggf. gemeinsam besprechen, um Einstieg zu erleichtern.
Lernwege Die Lernenden üben die geschickte Umformung von Wurzeln mit der Multiplikationsregel.

V25 Ziel: Wiederholen von Zahlbereichen und dem Ausrechnen/ Vereinfachen von Wurzeln

Dauer	20 min
Bezug	Nach **E9**, vor oder nach **O6**. Nach **V19-V21** und **V24|V24**. Im Basisweg ggf. auslassen.
Hinweise	Die Zahlen, die bei **b)** gesammelt werden, können vor der Klasse gemeinsam besprochen und eingeordnet werden. Eventuell bietet sich eine kurze Diskussion an, wann das Ausrechnen von Wurzeln sinnvoll ist und wann nicht.
Lernwege	Die Lernenden üben das Ausrechnen von Wurzeln. Dabei wird wiederholt, wann man Wurzeln einfach ausrechnen kann und zu welchen Zahlbereichen verschiedene Arten von Zahlen gehören.

V26 Ziel: Sensibilisierung für Flüchtigkeitsfehler und Übergeneralisieren von Regeln

Dauer	20 min
Bezug	Nach **E9**, nach **O6**. Nach **V24|V24**. Als **HA** geeignet, wenn danach ausführlich besprochen.
Hinweise	Die begangenen Fehler sollten explizit einzeln vor der Klasse besprochen werden, damit die Lernenden sie gezielt vermeiden können.
Lernwege	Die Lernenden können zunächst einzeln oder in Partnerarbeit vorgehen, um die Fehler nachzuvollziehen und die Lösungen zu korrigieren. Im Idealfall lernen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe genau hinzusehen und verführerischen (falschen) Abkürzungen zu widerstehen.

V27 Ziel: Üben von Rechenregeln und deren Anwendbarkeit

Dauer	30 min
Material	Taschenrechner
Bezug	Nach **E9**, nach **O6** und **O7**. Nach **V24|V24** und **V25**. Als **HA** geeignet.
Hinweise	Es sollte darauf geachtet werden, dass die Taschenrechner in **a)** wirklich erst zu Kontrolle benutzt werden. In **b)** und **c)** sind keine Taschenrechner nötig. Bei **b)** sind mehrere Lösungen möglich.
Lernwege	Die Lernenden üben das Ausrechnen von Wurzeln. Es wird gezielt trainiert, wo Rechenregeln anwendbar sind und wo nicht.

V28 Ziel: Üben der Multiplikationsregel für Wurzeln

Dauer	30 min
Bezug	Nach **E9**, nach **O6**. Nach **V22|V22**. Vor oder nach **V27**. **a)** als **HA** geeignet.
Hinweise	Die Lösungen können teilweise unterschiedlich ausfallen. Es sollte eventuell darauf hingewiesen werden, dass bei gewissen Mauern mehrere Lösungen bzw. Schreibweisen möglich sind.
Lernwege	Die Lernenden wiederholen die Multiplikationsregel vorwärts und rückwärts und reflektieren in **b)** ihre Lösungsstrategien. *Differenzierung:* Für unterschiedlich schnelle Lernende bietet sich **c)** als optionale Aufgabe an.

Basisaufgabe **V28** Ziel: Üben der Multiplikationsregel für Wurzeln

Dauer	20 min
Bezug	Nach **E9**, nach **O6**. Nach **V22|V22**. Vor oder nach **V27**. Als **HA** geeignet.
Hinweise	Teilweise verschiedene Lösungen möglich.
Lernwege	Die Lernenden wiederholen die Multiplikationsregel vorwärts und rückwärts.

V29 Ziel: Anwenden von Wurzeln im Praxisbeispiel

Dauer	30 min
Material	eventuell DIN-A3-Blätter zum Zeichnen, sonstige Zeichenutensilien, ggf. Taschenrechner
Bezug	Nach **E9**, nach **O6** und **O7**. Nicht vor **V24**.
Hinweise	Die Lernenden müssen in der Lage sein mit Maßstäben umzugehen. Je nach betriebenem Aufwand kann die Bearbeitungsdauer stark variieren.
Lernwege	Die Lernenden führen ein Gedankenspiel durch, bei dem nebenbei Wurzeln auftreten. Die Schülerinnen und Schüler wiederholen den Umgang mit Maßstäben und diskutieren die möglichen Konsequenzen des Gedankenspiels.

Basisaufgabe	V29	Ziel: Überprüfung des Verständnisses von Wurzeln und Zusammenhängen
Dauer	20 min	
Bezug	Nach **E9**, nach **O6** und **O7**. Nach **V27** und **V28**.	
Hinweise	Evtl. nochmal klären, wieso die Zahlen oft positiv sein müssen.	
Lernwege	Die Lernenden wiederholen Zusammenhänge und Regeln. Zuordnungen müssen stets begründet werden. Bei **b)** reflektieren die Lernenden ihre Lösungen.	

Vertiefen 6 Mit Wurzeln und Variablen rechnen

Hintergrund	Diejenigen Schülerinnen und Schüler, die in die gymnasiale Oberstufe weiter gehen wollen, müssen auch dann mit Wurzeln sicher umgehen, wenn Variablen im Spiel sind. Dazu muss nichts Neues in Erkunden und Ordnen gelernt werden, doch muss die Übertragung der Rechenregeln auf Wurzeln bei Termen mit Variablen geübt werden. Die Aufgaben **V30-V32** üben dies in operativen Päckchen (**V30**) und reflektionsanregenden Formaten (**V31**, **V32**). Die Vertiefeneinheit kann im Basisweg ggf. ausgelassen werden.

	V30	Ziel: Terme mit Wurzeln und Variablen vereinfachen
Dauer	15 min	
Bezug	Nach **O6** und **V22-V28**. Zweiter Teil als **HA** geeignet, wenn erster Teil zuvor besprochen. Im Basisweg ggf. auslassen.	
Hinweise	Aufgabe ist als Paralleldifferenzierung auf zwei Niveaus angelegt. Bei den nicht sinnvoll umformbaren Termen sollte erwähnt werden, wieso dies nicht geht.	
Lernwege	Die Lernenden üben den Umgang mit Rechenregeln. Neu sind die nun vorkommenden Variablen in den Wurzeln.	

	V31	Ziel: Lösungen von anderen nachvollziehen und auf Richtigkeit prüfen
Dauer	30 min	
Bezug	Nach **O6** und **V30**. Eventuell als **HA** geeignet. Im Basisweg ggf. auslassen.	
Lernwege	Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die vorgegebenen Lösungen und korrigieren diese. In **a)** wird die Anwendung der Rechenregeln beim Korrigieren wiederholt und bei **b)** durch das Einfügen der Zwischenschritte. Am Ende reflektieren die Lernenden ihre Ergebnisse in Partnerarbeit.	

	V32	Ziel: Terme geschickt umformen (mit Bezug auf binomische Formeln)
Dauer	15 min	
Bezug	Nach **O6**, **V30** und **V31**. **a)** als **HA** geeignet. Im Basisweg ggf. auslassen.	
Hinweise	Eventuell sollten die binomischen Formeln vor oder während der Bearbeitung der Aufgabe wiederholt werden.	
Lernwege	Die Lernenden erkunden den Term in **a)** zunächst durch Ausprobieren. In **b)** müssen sie den Term dann geschickt mit Hilfe einer binomischen Formel umformen, um das Ergebnis aus **a)** zu begründen. In **c)** wird kontrolliert, ob die Lernenden **a)** verstanden haben und in **d)** wird eine kleine Termmodifikation verlangt, um das Ergebnis nach Oles Vorschlag zu verändern.	

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

- erklären mathematische Phänomene und Zusammenhänge.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler …

- sind beim Rechnen mit Taschenrechner sensibel für den Unterschied zwischen Ergebnis abtippen und Speicher nutzen.
- können Taschenrechnerergebnisse deuten im Hinblick auf Genauigkeit.

Diese Kompetenzen werden in den Aufgaben **O1d)** und **O7** thematisiert und immer wieder in den Vertiefen-Aufgaben explizit oder implizit thematisiert, sie sollten im Unterricht Raum bekommen.

Außerdem werden historische Dimensionen aufgeworfen, insbesondere in **E1**, **E7**, **E8**, **E10**, **V12**, **V17**:

Die Schülerinnen und Schüler …

- kennen historische Probleme, über die sich Mathematiker lange Gedanken gemacht haben.
- wissen, dass einige Probleme schon sehr lange bearbeitet werden.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Sprechen und Schreiben: Die folgenden (ggf. schon aus anderen Kapiteln bekannten) Wörter und Satzbausteine sollten Lernende dauerhaft aktiv nutzen können:

- … das doppelt so große Quadrat/ das halb so große Quadrat,
- Die Seitenlänge des Quadrats/ Wurzel aus n liegt zwischen 3 und 4,
- Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt…,
- Ich ziehe die Wurzel aus 10,
- Ich quadriere die 3 und erhalte 9,
- Ich rechne das Quadrieren rückwärts,
- Ich nähere mich der Zahl an,
- … eine Dezimalzahl mit 10 Nachkommastellen, endlich/ unendlich vielen Nachkommastellen,
- Die Seitenlänge/ die Wurzel ist eine natürliche Zahl,
- Ich schreibe die Zahl als abbrechende oder periodische Dezimalzahl,
- Die Zahl ist reell/ irrational/ rational/ ganz/ natürlich,
- Jede … Zahl ist auch eine …Zahl , aber nicht umgekehrt
- Wenn …, dann ….

Lesen und Zuhören: Diese Wörter und Satzbausteine sollten Lernende verstehen, aber nicht unbedingt selbst nutzen können:

- Die Zahl unter der Wurzel ist das Quadrat einer rationalen oder irrationalen Zahl,
- Zu den reellen Zahlen gehören alle irrationalen und rationalen Zahlen,
- Sie ermitteln den Näherungswert,
- Ich ziehe das Wurzelziehen und das Multiplizieren/ Dividieren auseinander.

Überprüfung

Das Rollenspiel gleich zu Beginn des Kapitels in **E1** kann eine Gelegenheit zum **alternativen Leistungsnachweis** bieten. Es verknüpft entscheidende konzeptuelle Aspekte mit einer historischen Sicht.

Für die stärkeren Schülerinnen und Schüler könnte auch die eigenständige Bearbeitung und Präsentation von **E9** und **O6** zur Erkundung und Sicherung der Rechenregeln mit Wurzeln eine Gelegenheit zum eigenständigen Leistungsnachweis bieten, der der Klasse vorgeführt und dann durch die Basisaufgabe **E9** nachvollzogen wird.

Wichtig sind dennoch auch die elementaren Vorstellungen sowie Rechenfertigkeiten mit Wurzeln, die in Klassenarbeiten geeigneter geprüft werden als mit alternativen Leistungsnachweisen.

Die Hinweise beziehen sich auf die Aufgaben im Schulbuch. Alternativ kann mit den zusätzlichen Trainingsaufgaben im Onlinebereich von Cornelsen geübt werden.

Checkliste

Alte Geschichten von neuen Zahlen – Quadrieren rückwärts rechnen

	Ich kann … *Ich kenne …*	*Hier kann ich üben …*
K1	**Ich kann erklären, was eine Wurzel ist.** (1) Was haben Wurzeln mit Flächenberechnungen zu tun? Erkläre an einem Beispiel. (2) Erkläre einem Kind aus der vierten Klasse, was eine Wurzel ist. (3) Berechne die Wurzel aus 40 mit dem Taschenrechner und kontrolliere, ob die Rechnung stimmt. Erkläre, wieso du so prüfen kannst.	S. 104 Nr. 1, 2, 3 S. 105 Nr. 4, 5, 6 S. 106 Nr. 7, 8
K2	**Ich kann Wurzeln durch Abschätzen ermitteln.** Wie lang ist ungefähr ein quadratisches Grundstück mit 104 m² Flächeninhalt? 104 m²	S. 104 Nr. 2, 3 S. 106 Nr. 8
K3	**Ich kann Wurzeln beliebig genau annähern und die Idee eines Annäherungsverfahrens erklären.** (1) Berechne Wurzel aus 17 so, dass auch die vierte Nachkommastelle stimmt. (2) Bestimme mit einem Einschachtelungsverfahren Wurzel aus 30. Erläutere die Idee durch Bilder.	S. 107 Nr. 9, 10, 11 S. 108 Nr. 12, 13
K4	**Ich kann für die Wurzel einer natürlichen Zahl entscheiden, ob ihre Nachkommastellen abbrechen oder nicht.** Brechen die Nachkommastellen von $\sqrt{140}$ ab? Prüfe so auch $\sqrt{144}$.	S. 109 Nr. 14, 15, 16 S. 110 Nr. 17, 18
K5	**Ich kann für eine Zahl entscheiden, ob sie rational, irrational, reell, ganz oder natürlich ist.** (1) Erkläre, was irrational bedeutet und gib Zahlenbeispiele dazu an. (2) Fülle die Tabelle im Heft aus.	S. 110 Nr. 18 S. 111 Nr. 19, 20, 21

	reelle Zahl	irrationale Zahl	rationale Zahl	ganze Zahl	natürliche Zahl
-3	ja				
$-3{,}5$					nein
$\sqrt{35}$					
$\sqrt{36}$					
$\frac{3}{5}$					

K6	**Ich beherrsche die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln.** Welche Rechnungen sind falsch? (1) $\sqrt{7}+\sqrt{8}=\sqrt{7+8}$ (2) $\sqrt{8}-\sqrt{7}=\sqrt{8-7}$ (3) $\sqrt{7}:\sqrt{8}=\sqrt{7:8}$ (4) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{7\cdot 8}$	S. 112 Nr. 22, 23 S. 113 Nr. 27, 28
K7	**Ich kann mit einfachen Wurzeln von Bruchzahlen und Dezimalzahlen rechnen.** Bestimme ohne Taschenrechner. (1) $\sqrt{1{,}44}$ (2) $\sqrt{0{,}04}$ (3) $\sqrt{1{,}96+0{,}04}$ (4) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ (5) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{\frac{8}{20}}$	S. 112 Nr. 24 S. 113 Nr. 25, 26, 27 S. 114 Nr. 28, 29
K8	**Ich kann mit Wurzeln und Variablen rechnen.** Vereinfache, wenn möglich. (1) $\sqrt{25x^2}$ (2) $\sqrt{25+x^2}$ (3) $\sqrt{25+10x+x^2}$ (4) $\sqrt{18a^2}\cdot\sqrt{2b^2}$ (5) $\sqrt{\frac{9a}{b^2}}$	S. 115 Nr. 30, 31, 32

Kompetenzen, die im Basisweg angestrebt werden:

K1

K2

K6

Alle anderen sind verzichtbar

Kompetenzen aus vorangegangenen Kapiteln:

Flächen und Räume vergleichen (Klasse 5)

K2 Ich kann den Flächeninhalt und den Umfang von Rechtecken bestimmen.

Zahlensystematik (Klasse 7)

K2 Ich kann Brüche in Dezimalzahlen und Prozentzahlen umwandeln und wieder zurück.

Kompetenzen, die in der Übe-Kartei aufgegriffen werden:

K1/2 Ich kann erklären, was eine Wurzel ist und Wurzeln durch Abschätzen ermitteln.

K6 Ich beherrsche die Regeln für das Rechnen mit Wurzeln.

K7 *Ich kann mit einfachen Wurzeln von Bruchzahlen und Dezimalzahlen rechnen.* (nicht Basisweg)

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**: *http://www.ko-si-ma.de → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 9,*
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040036): *www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 9* oder *mathewerkstatt 5*.

Wurzeln 1	Bild der Einstiegsseite (SB|KOSIMA)
Wurzeln 2	Basisaufgabe *Das Quadratproblem von Sokrates* (SB **E1**|MB)
Wurzeln 2	Arbeitsmaterial *Faltanleitung* (SB **E2**|MB)
Wurzeln 3	Basisaufgabe *Rechnen mit Wurzeln* (SB **E9**|MB)
Wurzeln 4	Kopiervorlage *Quadrieren rückwärts rechnen* (SB **E10**|KOSIMA)
Wurzeln 5	Wissensspeicher *Dezimalzahlen 8* (SB **O1/O2/O3**|MB)
Wurzeln 6	Ausgefüllter Wissensspeicher *Dezimalzahlen 8* (SB **O1/O2/O3**|KOSIMA)
Wurzeln 7	Wissensspeicher *Dezimalzahlen 9* (SB **O4/O5**|MB)
Wurzeln 8	Ausgefüllter Wissensspeicher *Dezimalzahlen 9* (SB **O4/O5**|KOSIMA)
Wurzeln 9	Wissensspeicher *Figuren 9* (SB **O5**|MB Kl. 8)
Wurzeln 10	Ausgefüllter Wissensspeicher *Figuren 9* (SB **O5**|KOSIMA)
Wurzeln 11	Wissensspeicher *Dezimalzahlen 10* (SB **O6/O7**|MB)
Wurzeln 12	Ausgefüllter Wissensspeicher *Dezimalzahlen 10* (SB **O6/O7**|KOSIMA)
Wurzeln 13	Basisaufgabe *Quadrate in der Folge* (SB **V2**|MB)
Wurzeln 14	Basisaufgabe *Wurzeln untersuchen* (SB **V5**|MB)
Wurzeln 15	Basisaufgabe *Tabelle umgekehrt* (SB **V8**|MB)
Wurzeln 16	Applet *Einschachteln* (SB **V9**|CORNELSEN, Mediencode: 107-1)
Wurzeln 17	Wissensspeicher *Rationale Zahlen 2* (SB **V18**|MB Kl. 7)
Wurzeln 18	Ausgefüllter Wissensspeicher *Rationale Zahlen 2* (SB **V18**|KOSIMA)
Wurzeln 19	Wissensspeicher *Rationale Zahlen 3* (SB **V18**|MB Kl. 7)
Wurzeln 20	Ausgefüllter Wissensspeicher *Rationale Zahlen 3* (SB **V18**|KOSIMA)
Wurzeln 21	Basisaufgabe *Rechentricks* (SB **V22**|MB)
Wurzeln 22	Basisaufgabe *Wurzeln durch Zerlegen abschätzen* (SB **V24**|MB)
Wurzeln 23	Basisaufgabe *Multiplikations-Zahlenmauern* (SB **V28**|MB)
Wurzeln 24	Basisaufgabe *Wahr oder falsch? Partnercheck* (SB **V29**|MB)
Wurzeln 25	Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 116-1)
Wurzeln 26	Checkliste zum Ausfüllen (SB|MB & CORNELSEN)