

Sicherheit von Zahlenschlössern – Möglichkeiten geschickt zählen



Didaktischer Hintergrund zum Kapitel.....	ab Seite 2
Einstieg	ab Seite 6
Erkunden	ab Seite 8
Ordnen	ab Seite 12
Vertiefen	ab Seite 14
Checkliste	ab Seite 20
Digitale Angebote für dieses Kapitel.....	ab Seite 22

Herausgegeben von:

Bärbel Barzel
Stephan Hußmann
Timo Leuders
Susanne Prediger

Autoren:

Matthias Glade
Susanne Prediger

Redaktion:

Raja Herold-Blasius

© 2016 Kosima-Projekt:

Zitierbar als Glade, Matthias & Prediger, Susanne (2016): Sicherheit von Zahlenschlössern – Möglichkeiten geschickt zählen. In: Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.): Handreichungen zur Mathewerkstatt 9. Dortmund/ Freiburg/ Essen: Kosima. Online unter www.ko-si-ma.de

© 2016 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin:

Das Copyright gilt für alle dargestellten Seiten und Auszüge von Seiten des Schülerbuchs und des Materialblocks der *mathewerkstatt*; Rechteinhaber und Bildquellen sind in den entsprechenden Bildnachweisen dieser Produkte ausgewiesen.

Titel Sicherheit von Zahlenschlössern – Möglichkeiten geschickt zählen

Thema Kombinatorisches Denken

Kontexte – Kernfragen – Kernidee

Im Kontext von Zahlenschlössern als einfachem Beispiel für die Sicherung mit Codes werden zentrale Strategien der Kombinatorik erarbeitet. Die Zahlenschlösser motivieren die Frage nach der Sicherheit der Schlösser. Sichere Codes brauchen möglichst viele Einstellmöglichkeiten, so dass sie nicht in kurzer Zeit durch Ausprobieren geknackt werden können. Während für Zahlenschlösser auch mechanische Kriterien relevant wären (Materialstärke etc.), ist bei Passwörtern im Internet allein die Anzahl der Einstellmöglichkeiten ausschlaggebend. Deswegen nutzen PINs nicht mehr nur Zahlen, sondern auch Zahl-Buchstabenkombinationen, vorzugsweise mit Sonderzeichen.

Für die kombinatorische Bestimmung von Möglichkeiten spielen rezepthaft anzuwendende Formeln eine sehr untergeordnete Rolle, da sich immer wieder Fälle ergeben, für die den Lernenden keine Formeln zur Verfügung stehen. Wichtiger ist daher die Erweiterung der Problemlösekompetenzen.

In diesem Sinne geht es im Kapitel eher um geschicktes Darstellen und Zählen von Möglichkeiten. Eingeführt werden dazu zunächst strukturierte Listen und Baumdiagramme, von denen ausgehend dann die verkürzten Rechenwege – soweit möglich – entwickelt werden.

Kernfrage A: Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Ausgehend von der Kernfrage fertigen die Lernenden zunehmend systematischere Listen an, dann lernen sie auch Baumdiagramme mit der Strukturierung nach Schritten kennen und leiten daraus die multiplikative Formel ab. Sie nutzen also zunehmend strukturiertere und verkürzte Darstellungen, um die Zählprobleme zu lösen. In dem Teil, der nicht den Basisweg umfasst, werden auch Zählprobleme ohne Beachtung der Reihenfolge betrachtet. Dazu wird die Strategie „einfachere Fragen stellen“ bereichsspezifisch ausgebaut zu „Zu viel zählen und Doppelte zusammenfassen“. Da der Fokus auf den Strategien und nicht auf Formeln liegt, wird dazu jedoch keine allgemeine Formel erarbeitet.

Kompetenzen

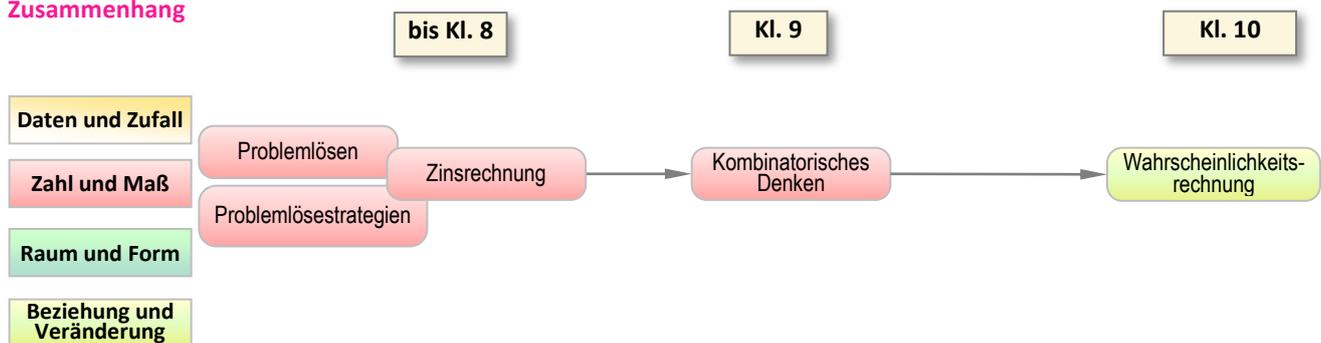
K1: Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „systematisches Aufschreiben von Listen“.

K2: Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „systematisches Zeichnen von Baumdiagrammen“.

K3: Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „in Schritten zählen und rechnen“.

K4: Ich kann schwierige Zählprobleme lösen, indem ich einfachere Fragen stelle.

Zusammenhang



Struktur

ca. 2 Wochen

Einstieg: Was macht ein Zahlenschloss sicher?					15		
A Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?					E	O	
<u>E1</u> E1	Mehrere Schlösser (mit Listen) untersuchen	O1	Systematische Listen erstellen	V1-V6	Möglichkeiten übersichtlich zählen	30	30
E2	Baumdiagramme zum übersichtlichen Zählen nutzen	O2	Baumdiagramme nutzen	<u>V7</u> V7 V8 <u>V9-V10</u> V9-V10	Möglichkeiten im Baumdiagramm darstellen	25	25
E3	Zahl der Möglichkeiten mit Rechnungen bestimmen	O3	In Stufen zählen, um zu rechnen	<u>V11</u> V11 V12 <u>V13, V14</u>	Möglichkeiten im Baumdiagramm darstellen und rechnen	35	20
■ E4	Zu viel zählen	■ O4	Zu viel zählen und zusammenfassen	■ V13-16	Erst zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen	30	25
E5	Möglichkeiten der Anordnung bestimmen					30	
■ E6	Schwierigeres Zählproblem lösen			<u>V17-V20</u> ■ V21-V22	Möglichkeiten in unterschiedlichen Situationen	15	

Basisweg (bei Nutzung aller Basisaufgaben im niedrigeren Niveau):

E1 – O1 – E2 – O2 – E3 – O3 – E5 (d.h. ohne E4, E6, O4)

Kurzweg (bei wenig Zeit):

E1 | E1 – O1 – E2 – O2 – E3 – O3 mit Vertiefen aus V1-V12

Intensivzugriff

Hintergrund

Der Kontext Zahlenschlösser ist die zugängliche Variation des Kontexts Geheimcodes, der zum Beispiel mit PINs, TANs und anderen Passwörtern im Internet eine sehr große Relevanz hat (Bild aus **V18**).

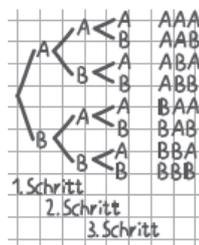
Ihr neues Passwort:	Ein möglichst sicheres Passwort besteht aus:
<input type="text"/>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Mindestens 6 Zeichen ✓ Buchstaben und Zahlen ✓ Umlauten und/oder Sonderzeichen ✓ Groß UND Kleinschreibung
neues Passwort wiederholen:	
<input type="text"/>	

„Je mehr Einstellmöglichkeiten, desto sicherer das Schloss.“ Auch wenn die Sicherheit von Fahrrad-Schlössern von vielen Aspekten abhängig ist, lässt sich die Idee der Abhängigkeit der Sicherheit von der Zahl der Einstellmöglichkeiten dennoch gut erarbeiten. Dabei greift das Kapitel nicht auf Wahrscheinlichkeiten zu (dies erfolgt später im Kapitel 10 zur Wahrscheinlichkeitsrechnung), sondern verbleibt komplett beim Zählen von Möglichkeiten. Auf das hier fokussierte geschickte Zählen von Möglichkeiten und die zugehörigen Darstellungen der strukturierten Liste und des Baumdiagramms kann im 10. Jahrgang das Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauen.

Im Kapitel Kombinatorisches Denken lernen die Schülerinnen und Schüler, Zählprobleme zunehmend systematisch zu lösen, indem sie systematische Listen, Baumdiagramme und dann Rechnungen nutzen. Letzterem wird dabei weniger Bedeutung für das Kapitel eingeräumt, weil es nicht um eine rezepthafte Nutzung fertiger Formeln geht, sondern um Problemlösestrategien – insbesondere um die Strategie „Systematisch aufschreiben“.

Auch wenn das Rechnen mit fertigen Formeln nicht im Vordergrund steht, legen es Zählprobleme mit großen Zahlen doch nahe, nicht durchgängig auf Listen und Baumdiagramme zurückzugreifen, sondern rechnerische Ansätze zu entwickeln. Dies ist für Zählprobleme mit Wiederholungen und mit Beachtung der Reihenfolge besonders einfach. Gleichzeitig werden von Beginn an auch Probleme der anderen kombinatorischen Grundsituationen thematisiert, um die Lernenden nicht in Rezepte verfallen zu lassen. Die Grundsituationen (mit / ohne Wiederholung; mit / ohne Beachtung der Reihenfolge) werden allerdings (im Gegensatz zum Unterricht der Oberstufe) nicht als solche klassifiziert.

Dabei orientiert sich die Logik des Kapitels weniger an den verschiedenen Zählproblemen, die abgearbeitet werden, als vielmehr an den zunehmend strukturierter werdenden Lösungsstrategien. Im Wissensspeicher werden folgerichtig die zentralen Strategien und Darstellungsmittel (Listen / Bäume / Rechnungen) prominent gesichert.



Auch wenn die Lösungswege Liste, Diagramm, Rechnung grundsätzlich progressiv eingenommen werden, so ist der flexible Wechsel zwischen den Strategien entscheidend, um kombinatorische Probleme erfolgreich lösen zu können. Listen ermöglichen eine inhaltliche Validierung rechnerischer Ansätze, die oft voreilig ohne hinreichende Klärung der Situation genutzt werden. Insofern ist es wichtig, die Lernenden immer wieder zum Validieren mit Listen anzuregen.

Das ist auch für die Vorsichtigen wichtig, um ihr inhaltliches Verständnis mit weiteren Strukturen (Wo sind Stufen für ein Zählen in Schritten? Wie sehen die Äste in einer Stufe aus? Kann man die Anzahl schneller bestimmen?) anzureichern.

Etappe A: Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

In **E1|E1** werden verschiedene Zählprobleme auf einmal präsentiert, um direkt die Vielfalt der Herausforderungen nebeneinander zu sehen (im Basisweg ohne Yussufs Zahlenschloss ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge). Die Erkundungen sind bewusst offen für vielfältige Wege, prominent sind hier (unsystematische) Listen, die in **O1** in einer möglichst systematischen Form gesichert werden. In der Basisaufgabe **E1** wird die Liste explizit angeregt.

In **E2** und **O2** werden die Baumdiagramme für alle Lernenden als alternative Darstellung erarbeitet und gesichert. Sie erlauben es, in Schritten zu zählen, was eine weitergehende Systematisierung der>Listenerstellung ermöglichen kann. Zudem ermöglichen die Baumdiagramme die Fokussierung der Möglichkeiten in jedem Schritt (für Zahlenschlösser heißt das an jeder Stelle). Damit wird die Entwicklung eines rechnerischen Lösungswegs über die Multiplikation der Möglichkeiten in jedem Schritt vorbereitet, die in **E3** und **E5** erarbeitet und in **O3** gesichert und mit den anderen Lösungsstrategien verknüpft wird.

Entscheidend ist immer wieder der Wechsel zwischen den Strategien, um ein adäquates Verständnis und eine hinreichende Validierung des gewählten Modells zu gewährleisten.

Das anspruchsvolle Zählproblem ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge ist in **E4** ein geeigneter Anlass für die Strategie „Einfachere Fragen stellen“. Sie wird hier umgesetzt in die bereichsspezifische Strategie „Zu viel zählen und wieder ausgleichen“, um einen rechnerischen Ansatz zu finden. Das bedeutet, man ignoriert die Nichtbeachtung der Reihenfolge und bestimmt die Zahl der Möglichkeiten für die Kombination ohne Wiederholung per Multiplikation und dividiert dann durch die Anzahl der möglichen Anordnungen der Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden. Diese Strategie wird auf dem Basisniveau ausgespart, für die anderen aber in **O4** gesichert.

E6 bietet schließlich eine komplexe Anwendung.

Es ist sinnvoll, die erarbeiteten Strategien „systematisch aufschreiben in einer Liste“, „systematisch aufschreiben im Baumdiagramm“ und „Einfachere Fragen stellen“ auf großen Karten in der Klasse auszuhängen, um die Lernenden immer wieder dazu anzuregen, diese bewusst zu nutzen.

systematisch aufschreiben

einfachere Fragen stellen

Rezepthafte Formeln dagegen sind in dem Kapitel ausdrücklich nicht erwünscht.

Differenzierung mithilfe von Basisaufgaben

In der Basisversion wird auf die Erarbeitung der Strategie „Zu viel Zählen und dann Doppelte zusammenfassen“ verzichtet, so dass sich diese Lernenden auf die anderen Strategien konzentrieren können. Dadurch entfallen die Aufgaben E4, E6 und O4. In Aufgabe E1 wird die Herausforderung, zu vielen teilweise komplexen Schlössern die Möglichkeiten zu bestimmen, reduziert, indem das schwerste Schloss durch ein sehr einfaches ersetzt wird und die Aufgabenstruktur durch enger geführtes Abarbeiten der einzelnen Schlösser weitergehend vorstrukturiert wird.

Im Vertiefen wird durch eine stärkere Vorstrukturierung im Arbeitsblattformat in V7, V10, V11 unterstützt und die Reflexion von Schritten beim Deuten von Baumdiagrammen und Aufstellen von Rechnungen angeregt. V13 bietet eine abschließende Systematisierung der Darstellungen, die gut bearbeitet werden kann, wenn die anderen an weiteren komplexen kombinatorischen Problemen arbeiten. V14 regt noch einmal bewusst an, mit Strategien zu arbeiten.

Diagnose

- Inwiefern gelingt es den Lernenden zunehmend die angebotenen Strukturen (Gruppen in den systematischen Listen, Schritte im Baumdiagramm, Multiplikation als ökonomisches Zählen in Schritten) zu nutzen, um die Zählprobleme ökonomischer zu lösen?
- Inwiefern gehen die Lernenden auf Listen und Baumdiagramme zurück oder vereinfachen die Zählprobleme, um Ansätze begründet aufzustellen oder zu validieren?

Die große Gefahr bei der Nutzung von rechnerischen Verfahren in der Kombinatorik besteht darin, dass willkürlich Rechnungen aufgestellt werden, ohne die Passung zur Situation hinreichend zu reflektieren. Daher empfiehlt es sich, die Lernenden immer wieder zur Nutzung von Listen oder Baumdiagrammen zur Generierung oder Validierung von Ansätzen anzuregen.

Zusätzliches Trainingsangebot

Zu jeder Trainingsaufgabe befinden sich weitere Trainingsaufgaben im Onlinebereich von CORNELSEN.

Literatur

- Hefendehl-Hebeker, Lisa & Törner, Günter (1984): Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik*, 12 (4), 245-262.
- Höveler, Karina (2014): Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern. Dissertation, TU Dortmund. Online zugänglich unter <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-15563>

Einstiegsseite Sicherheit von Zahlenschlössern

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- denken sich in den Kontext der Zahlenschlösser ein;
- reflektieren über den Zusammenhang der Anzahl der Stellen eines Zahlenschlosses oder Codes mit der Sicherheit des Schlosses.

Bezug

Die allgemeinen Überlegungen zur Sicherheit und zur Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten bei Zahlenschlössern werden in [E1|E1](#) konkretisiert, so dass verschiedene Wege zur Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten entwickelt werden können.

Vorbereitung/Material

Zahlenschlösser und andere Verschlüsselungsinstrumente mitbringen (lassen).

Umsetzungsvorschlag (15 min + HA + 20 min)

Gemeinsames Anschauen der Seite und Sammeln erster Ideen zur Sicherheit von Schlössern und Verschlüsselungen, insbesondere von Zahlenschlössern

UG

Mögliche HA: [E1a](#)|[E1a](#)

Intensivzugriff Umsetzungshinweise/Alternativen

Im Rahmen der Diskussion kann die Vielzahl der Erfahrungen der Lernenden mit (Zahlen-)schlössern und Codes und deren Sicherheit eingefangen werden.

In der Moderation sollte hervorgehoben werden,

- welche Aspekte in der folgenden Unterrichtsreihe bewusst und explizit aufgegriffen werden (z.B. die Bestimmung der Anzahl der Möglichkeiten von Zahlenschlössern und anderen Codes) und
- welche Aspekte im Kapitel nicht prominent untersucht werden (z.B. Verschlüsselungsverfahren, Wahl zwischen verschiedenen Schlosstypen, Schlösser mit Schlüssel, Stabilität von Schlössern,...).



Zahlenschlösser an Fahrrädern liefern den ersten Zugriff zu Passwörtern: Je mehr Stellen und Ziffern, desto schwieriger ist die Nummer zu erraten.

Die Sicherheit von Fahrrad-schlössern wird auch durchs Material bestimmt, bei Passwörtern im Netz dagegen geht es ausschließlich um die Zahl der Möglichkeiten.

Ziele des Kapitels aus Vorschauerspektive

In diesem Kapitel...

- beschäftigst du dich damit, warum es wichtig ist, wie viele Einstellmöglichkeiten ein Zahlenschloss oder Passwort hat.
- zählst du geschickt die Anzahl der Einstellmöglichkeiten.
- nutzt du dazu verschiedene Darstellungen.
- suchst du zu Zählproblemen einfachere Fragen, um den Rechenweg zu finden.

Erkunden A Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

E1|E1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erkunden verschiedene Arten von Zahlen- und Buchstaben-schlössern und die Anzahl der Möglichkeiten;
- finden und vergleichen Wege, die Anzahl von Möglichkeiten zu bestimmen und aufzuschreiben;
- überprüfen Listen auf Vollständigkeit.

E1 | E1 Bezug

Weiter mit **O1**.

E1 | E1 Vorbereitung/Material

Verschiedene (Zahlen-)Schlösser zur Veranschaulichung und zum Ausprobieren mitbringen (lassen). Lochkarten, wenn vorhanden.

E1|E1 Umsetzungsvorschlag (ca. 30 min)

a)|a) Evtl. als HA nach Auftakt

b-d)|b) Die Basisaufgabe hat bis auf die von Peter | Yussuf dieselben Schlösser. Vorlesen und Klärung inhaltlicher Fragen und des Funktionierens der Schlösser (Yussufs Lochkartenschloss ist erläutersungswürdig, in Basisaufgabe **1b** ersetzt). Erste Vermutungen über Anzahl der Einstellmöglichkeiten aufstellen. UG
EA/ PA

e)|c) Ergebnisse vergleichen, systematischer aufschreiben und auf Vollständigkeit überprüfen (**Mathekonzferenz**). PA/ GA

f)|d) Vergleichen der Lösungen und Begründungen. GA/ UG

Mögliche HA: V1

Basisaufgabe **1b-d)**:

Peters Schloss	Mias Schloss	Alis Schloss	Pauls Schloss
1000	# 27	# 1.728	# 5040

meist über Listen bestimmt.

E1|E1 Lernwege

Die Lernenden werden ihre Lösungen bei den verschiedenen Schlössern in unterschiedlichem Grad strukturieren und unterschiedliche Darstellungen nutzen. Es können Listen, Baumdiagramme oder das Stellenwertsystem genutzt werden. In **E1|E1** reicht es, die Lernenden bei der Überarbeitung zu ermutigen, möglichst geordnete (angefangene) Listen zu erstellen. Es können aber ganz verschiedene Sortierungen vorgenommen werden.

E1|E1 Differenzierung

Die Aufgaben ermöglichen unterschiedliche Zugänge über verschiedene Darstellungen, den Grad der Strukturierung, das Schwierigkeitsniveau und die Vollständigkeit der bearbeiteten Aufgaben. In der Basisaufgabe wird zunächst das schwierigste Schloss von Yussuf ausgespart und stärker vorstrukturiert gearbeitet wird (ersatzweise gibt Peters Schloss eine Hilfe für den Einstieg). Eine weitere Progression kann durch den Austausch unter den Lernenden und durch adaptive Impulse („Wie hast du die Möglichkeiten angeordnet? Kannst du noch einheitlicher, geordneter aufschreiben“) angeregt werden.



Intensivzugriff

E1|E1 Umsetzungshinweise/Alternativen

1a)|1a) Hier reicht eine grobe qualitative Schätzung.
1b-d)|1b) Es empfiehlt sich, zunächst das Verständnis der verschiedenen Arten von Schlössern sicherzustellen, insbesondere das Lochkartenschloss wird den Lernenden evtl. nicht vertraut sein (in der **Basisaufgabe** fehlt es). Da beim Lochkartenschloss die Reihenfolge der Markierung der Felder beliebig ist, sind hier 12 und 21 identisch (am besten konkret am Bild einer Lochkarte erklären.)

Die Schlösser sind nicht alle gleich schwierig, die Lernenden sollten angeregt werden, bewusst zuerst die einfachen Schlösser zu bearbeiten und Listen anzufangen, auch wenn es zu viele Möglichkeiten sind, um sie vollständig zu notieren. Bei der ersten Bearbeitung in **E1|E1** müssen noch nicht alle Schlösser geknackt werden, es reicht zu verstehen, warum es kompliziert ist. Im methodisch sehr wichtigen Vergleich zwischen den Lernenden können systematischere Notationen thematisiert werden.

Die Reflexion von **1f)** und **1d)** wird gemeinsam durchgeführt. Dabei werden verschieden systematische Notationen der Lernenden am OHP verglichen. Die Suche nach strukturierten Notationen zieht sich aber bis **O3**.

E1|E1 Erwartungshorizont

1a)|1a): Je mehr Einstellmöglichkeiten ein Schloss hat, desto sicherer ist das Schloss, wenn es mit Probieren in einer bestimmten Zeit geöffnet werden soll. Für ein Schloss mit 1000 Kombinationen braucht man aber nur ca. 3h, wenn man pro Sekunde eine Möglichkeit ausprobiert.
1b):

Mias Schloss	Alis Schloss	Yussufs Schloss	Pauls Schloss
# 27	# 1.728	# 6	# 5040

meist über vollständige oder angefangene Listen bestimmt. Für **1c)** und **1d)** ist strukturiertes Aufschreiben nützlich.

Erkunden A Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

E2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- zählen Möglichkeiten in Baumdiagrammen in Schritten;
- reflektieren den Nutzen von Baumdiagrammen und ihre Grenzen.

E2 Bezug

Nach **O1**, weiter mit **O2**.

E2 Umsetzungsvorschlag (ca. 25 min)

- | | | |
|----|---|---------------|
| a) | Baum zu Schloss vervollständigen. Eine passende Liste ergänzen (evtl. schon in 1b). Idee „in Schritten“ erklären. | EA/ PA/
UG |
| b) | Bäume zu Schlössern aus E1 zeichnen. | EA/ PA |
| c) | Vergleichen und Bewerten der verschiedenen Bäume | PA/ UG |

Mögliche HA: Erstellen eines Baumes zu einem Schloss mit zwei Stellen und drei Ziffern

E3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- finden Terme, mit denen sie die Anzahl der Möglichkeiten berechnen können;
- wägen ab, wann eine Rechnung und wann eine Liste oder ein Baumdiagramm der bessere Lösungsweg ist.

E3 Bezug

Nach **O2** und viel Vertiefen, weiter mit **O3**.

E3 Umsetzungsvorschlag (35 min)

- | | | |
|-----|--|--------|
| a) | Ideen für mögliche Terme entwickeln | EA |
| bc) | Lernende versuchen sich an Termen für die anderen Schlösser. | EA/ PA |
| d) | Verschiedene Lösungswege vergleichen | PA/ UG |

Mögliche HA: Für **V1** Rechnungen suchen

Intensivzugriff

E2 Umsetzungshinweise

Immer wieder den Vergleich mit den zuvor in **1b)-E1d)** erstellten Listen anregen.

In **2c)** zielt die Reflexion auf die Komplexität aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten oder der Komplexität des Zählproblems.

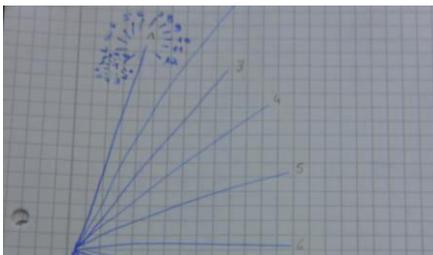
Impulse: Was bedeutet eigentlich die Verzweigung? Wo findet man sie in den Listen?

E2 Erwartungshorizont

2a) Die Liste ergibt sich aus allen Einträgen ganz rechts im Baum. Man muss allerdings ggf. noch Äste durchstreichen, denn die Buchstaben sollen nur einmal vorkommen

2b) Ole meint mit schrittweise hier stellenweise. Zuerst betrachtet er die erste Stelle mit einem A, dann als zweite Stelle die weiteren Möglichkeiten, zum Ende die dritte Stelle.

2c) Beispiellösungen für die kleineren Bäume im Buch. Bei großen Bäumen ist es schwierig, eine Ordnung zu wahren (siehe Bild); wenn nichts doppelt vorkommen darf oder die Reihenfolge egal ist, sind die Bäume kompliziert.



E3 Umsetzungshinweise/Alternativen

Entscheidend ist, dass Pias Vorbild folgend an Listen und Bäumen erklärt wird. (Nützliche Notationen und Strukturen dazu werden in **V7** explizit gemacht.)

Wichtig ist (immer wieder) die Reflexion: Mit einer Rechnung ist man schneller; mit Listen oder Bäumen versteht man die Situationen besser.

E3 Erwartungshorizont

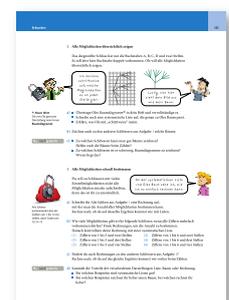
3a) $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ Möglichkeiten. Für die erste Ziffer gibt es 12 Möglichkeiten. Bei jeder dieser 12 gibt es für die zweite Ziffer ebenfalls 12 Möglichkeiten, also insgesamt schon $12 \cdot 12 = 144$ Möglichkeiten. Bei den 144 Möglichkeiten gibt jeweils weitere 12 Möglichkeiten und damit $144 \cdot 12 = 1728$ Einstellmöglichkeiten insgesamt.

3b) Mia: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Möglichkeiten

Yusuf: $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ Möglichkeiten (Rechnung nicht besprechen, sie ist noch nicht leistbar, sondern wird erst in **E4** angeregt)

Peter: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ Möglichkeiten, ...

3c) *Rechnungen* sind bei vielen Möglichkeiten sinnvoll, wenn die Struktur bereits an Beispielen mit kleinen Zahlen und anhand von Listen verstanden worden ist. *Bäume* bieten sich an, um immer alle Möglichkeiten aufzuzählen, ohne auf weitere Einschränkungen zu achten. Im zweiten Schritt schränkt man diese dann ein. *Listen* helfen, da man mit diesen auch unsystematisch beginnen kann, wenn man die Situation noch nicht vollständig durchdrungen hat.



Erkunden A Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

E4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- unterscheiden Listen mit Beachtung der Reihenfolge von solchen, bei denen die Reihenfolge nicht beachtet wird;
- reflektieren den Nutzen von Situationen, in denen man rechnen kann;
- erkunden den Sinn der Strategie „Zu viel Zählen und wieder zusammenfassen“.

E4 Bezug

Nicht im Basisweg. Nach **O3** und bei Sicherheit, Rechnungen zur Lösung von kombinatorischen Problemen zu nutzen. Weiter mit **O4**.

E4 Vorbereitung/Material

Evtl. ein echtes Lochkartenschloss bzw. Material zur Veranschaulichung eines solchen.

E4 Umsetzungsvorschlag (35 min)

- a) Überfüllte Liste und Rechnung aufstellen EA/ PA
- b) Liste umstrukturieren, doppelte zusammenfassen und Zahl der tatsächlichen Möglichkeiten bestimmen. EA/ PA
- c) Schnellarbeiter zählen Möglichkeiten bei einem weiteren Lochkartenschloss. EA/ PA
- d) Reflektieren, was in den obigen Aufgaben UG warum gemacht wurde, um überflüssige Möglichkeiten auszugleichen.

Mögliche HA: **V14** oder **V13**

Intensivzugriff

E4 Umsetzungshinweise/Alternativen

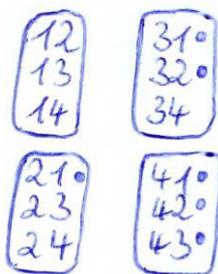
In der Begleitung und Reflexion explizit aufgreifen, warum die Strategie *Zu viel Zählen und wieder ausgleichen* nützlich ist (da eine durch Multiplikation berechenbare Situation geschaffen wird). Der volle Nutzen erschließt sich aber erst nach einigen Realisierungen, wenn klar ist, dass immer durch zwei (oder durch die Anzahl der Kombinationen der Menge) geteilt werden muss.

Alternativ kann **4c**) nach **4d**) von allen (außer Basis) bearbeitet werden.

E4 Erwartungshorizont

4a) Es müssen immer zwei Löcher markiert sein und eine Zahl kommt immer nur einmal vor, deshalb können keine zwei Löcher markiert werden, die dieselben Zahlen darstellen. Rechnung $4 \cdot 3$.

4a)



4b)

12	23
21	32
13	24
31	42
14	34
41	43

4b) Beim Schloss gibt es 6 verschiedene Codes.

4c) Das 5-Loch-Lochkartenschloss hat 30 verschiedene Einstellmöglichkeiten. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten insgesamt, wenn die Reihenfolge wichtig wäre. In jeder Gruppe, die zu einer Markierung an der Lochkarte gehört, sind 6 Elemente (z.B. 123, 132, 213, 231, 312, 321). Also gibt es $60 : 6 = 10$ Möglichkeiten.

4e) Zu viele Möglichkeiten kann man bei diesen Beispielen mit der Division durch 2 ausgleichen (durch die Division durch die Anzahl der gleichen Einstellmöglichkeiten).

E4 Lernwege

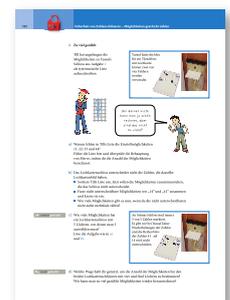
Zudem ist es möglich, dass die Lernenden – vor allem bei zuvor bearbeiteten analogen Schlössern – auf additive Strukturen fokussieren. Dann lohnt es sich in der Reflexion dieser Aufgabe additive und multiplikative Strukturen bewusst gegenüberzustellen, wenn additive auftraten.

1 ← 7	2 ← 7	3 ← 7	4 ← 7				
1 ← 7	2 ← 7	3 ← 7	4 ← 7				
1 ← 7	2 ← 7	3 ← 7	4 ← 7				
1 ← 7	2 ← 7	3 ← 7	4 ← 7				
4	+	3	+	2	+	1	= 10

Die multiplikative Struktur bietet ein verallgemeinerbares Vorgehen.

E4 Differenzierung

In der Basisversion wird diese Aufgabe ausgespart und an den Aufgaben aus Vertiefenstufe 1, 2, aus dem digitalen Zusatzmaterial oder an den Basisaufgaben **V13**, **V14** gearbeitet.



Erkunden A Wie kann ich alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

E5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...
 • bestimmen die Möglichkeiten verschiedener Anordnungen vorgegebener Zahlen;
 • reflektieren Lösungswege in Bezug auf Ökonomie.

E5 Bezug

Nach E4, weiter mit V13-16.

E5 Umsetzungsvorschlag (30 min)

- a) Anzahl der Möglichkeiten für verschiedene Reihenfolgen von vier Ziffern bestimmen. EA/ PA
-
- b) Anzahl der Möglichkeiten für verschiedene Reihenfolgen von zwei, drei und fünf Ziffern bestimmen. EA/ PA
-
- c) Verschiedene Lösungswege vergleichen. PA/ UG

Mögliche HA: Auf wie viele Arten kann man drei Kinder auf eine Bank setzen? Und 4? Oder aus V13-V16

E6 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...
 • behandeln ein sehr schweres Schloss im komplexen Modell (mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge);
 • führen das Problem auf ein leichteres zurück;
 • reflektieren den Nutzen von Listen statt Rechnungen.

E6 Bezug

Nicht im Basisweg. Nach O4.

E6 Umsetzungsvorschlag (15-30 min)

- a) Entwicklung eines ersten Zugangs EA/ PA
-
- b) Vereinfachte Version mit nur zweistelligem Zahlencode bearbeiten
-
- c) Reflexion der Charakteristika der Aufgabe und der Problematik von Rechnungen PA/ UG
-
- d) Aufteilung in Gruppen, arbeitsteilige Lösung der Aufgabe GA

Mögliche HA: V21

Intensivzugriff

E5 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Lernenden sollten ermuntert werden, verschiedene Wege auszuprobieren. In der Reflexion können diese verglichen und begründend vernetzt werden. Die Rechnung $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mit Bezug auf Liste und Baum begründen: Für die erste Zahl habe ich 4 Möglichkeiten, für die zweite 3, usw.

E5 Erwartungshorizont

5a) Pias Schloss hat 24 ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) Möglichkeiten, die 4 Ziffern zu kombinieren. Im Baumdiagramm stellen die einzelnen Faktoren die Stufen dar.

5b) n Ziffern bei einem n stelligen Code ergibt n!

2-stellig	3-stellig	5-stellig
$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

5c) Nach den ersten Beispielen, könnte sich als schneller Rechenweg bereits die Multiplikation ergeben.

E5 Lernwege

Bei diesem für die Lernenden neuen Zählproblem können die Lernenden verschiedene Darstellungen nutzen, meist wird auf Listen oder Baumdiagramme zurückgegriffen. Für dieses spezielle Zählproblem können in der wiederholten Bestimmung von Anordnungen ökonomischere Wege entwickelt werden.

E6 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Herausforderung der Aufgabe besteht darin, gleiche Möglichkeiten nicht mehrfach zu zählen. Das bedarf einer sorgsam Aufteilung der Kombinationen. In den verschiedenen Kategorien können abkürzende Rechnungen gefunden werden.

E6 Erwartungshorizont

6b) 1. Weg: getrennte Bestimmung von Doppelzahlen (gut verallgemeinerbar): 10 doppelte Zahlen (00, 11, 22, ..., 99) und $10 \cdot 9 : 2 = 45$ andere Zahlen. 55 Möglichkeiten ($55 \cdot 4 = 220$ Kombinationen)

2. Weg: Zahlen, die mit 0 beginnen: 10 Möglichkeiten, Zahlen die mit 1 beginnen: 9 Möglichkeiten, da $10 = 01$. Mit 2 beginnend dann nur noch 8. Also $10 + 9 + \dots + 1 = 55$ Möglichkeiten.

6c)

3 verschiedene Ziffern: $10 \cdot 9 \cdot 8 : 6 = 120$

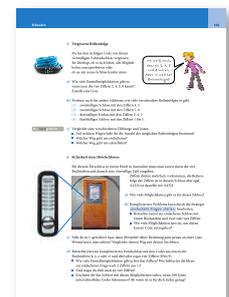
2 verschiedene Ziffern: beginnend mit 0: 011, 022, ... ; 9 Möglichkeiten

beginnend mit 1: 100, 122, ... ; 9 Möglichkeiten, ...

insgesamt 90 Möglichkeiten

alle Ziffern gleich: 10 Möglichkeiten

In der Summe sind es insgesamt 220 Möglichkeiten ($220 \cdot 4 = 880$ für das ganze Schloss).



Ordnen A Wie kann man alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

O1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- unterscheiden verschiedene Listen bzgl. der Übersichtlichkeit;
- sortieren *un*übersichtliche Listen um;
- bilden systematisch Gruppen.

O1 Bezug

Nach **E1**, weiter mit **V1-V2** oder **E2**.

O1 Vorbereitung/Material

Materialblock, 1. Strategie auf Folie

O1 Umsetzungsvorschlag (30 min)

a)	Analyse der Listen	EA/ PA
b)	Gruppen suchen und markieren	PA/ UG
c)	Möglichkeiten in Listen systematisch darstellen	EA
d)	Lösungen vergleichen und übertragen	GA/ UG

Mögliche HA: V1 oder V2

HA aus **V1-V4**.

O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- sichern das Zeichnen von Baumdiagrammen;
- nutzen Baumdiagramme, um über die Struktur von Listen zu reflektieren.

O2 Bezug

Nach **O1**, **E2** und nach hinreichend Erfahrung mit Listen und Bäumen. Weiter mit **V7|V7-V10** und dann **E3** (Rechenregel).

O2 Vorbereitung/Material

Materialblock, 2. Strategie auf Folie

O2 Umsetzungsvorschlag (25 min)

a)	Struktur der Baumdiagramme rekonstruieren und mit Listen verknüpfen	EA
b)	Baumdiagramme zu Typen aus 1c) zeichnen und Gruppenbildung reflektieren	EA/ PA
cd)	Baumdiagramme vergleichen und in den Wissenspeicher übertragen.	PA/ UG

Mögliche HA: V7 oder V8

Intensivzugriff

O1 Umsetzungshinweise

Hier ist Kommunikation über verschiedene Listen wichtig. Verschiedene Lösungen groß auf Karten notieren lassen und an der Tafel sammeln. Gemeinsam sollten die in den Listen gebildeten Gruppen herausgestellt werden.

O1 Erwartungshorizont

1ab) In Liste 3 und 4 sind Gruppen und eine Struktur erkennbar. Liste 3 fasst verschiedene Reihenfolgen der gleichen Buchstaben zusammen. Liste 4 denkt vom zweiten Buchstaben aus. Ideal ist z.B. eine gespiegelte Liste 4, aber vieles ist zulässig und begründbar.

1c) Siehe ausgefüllter Wissenspeicher.

O1 Lernwege

Das Aufstellen von Listen aller Möglichkeiten kann auf unterschiedliche Weisen durchgeführt werden. Hier sind verschiedene Strukturierungen und Gruppenbildungen denkbar.

O2 Umsetzungshinweise

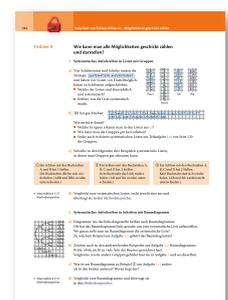
Zentral ist auch hier das Systematische der einzelnen Baumdiagramme herauszustellen. Es lohnt sich die Diskussion, wie man Baumdiagramme einigermaßen strukturiert zeichnet, damit es nicht ganz schief wird. Dabei können auch gut inhaltliche Charakteristika der Baumdiagramme diskutiert werden.

Besprechung: Erstellte Baumdiagramme der Aufgaben einsammeln, den Aufgaben begründet zuordnen und kontrollieren lassen, um für Lernende ein geschlosseneres Format zu erhalten.

O2 Erwartungshorizont

a) Oles Baumdiagramm gehört zu Beispiel 1 aus **1c)**.

b) Siehe ausgefüllte Wissenspeicher



Ordnen A Wie kann man alle Möglichkeiten geschickt zählen und darstellen?

Schnellzugriff

O3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- verknüpfen Multiplikation und die Bildung von Schritten;
- verknüpfen die Darstellungen Rechnung, Liste und Baum.

O3 Bezug

Nach **O2** und **E3**. Weiter mit **E4** (**E4** nicht im Basisweg).

O3 Umsetzungsvorschlag (20 min)

a)	Erstellen einer Rechnung zum Baumdiagramm aus 1b)	EA/ PA
b)	Verknüpfen multiplikative Struktur mit Listen	EA/ PA
c)	Beispiel für zunächst nicht multiplikativ strukturierbare Situation abgrenzen	EA/ PA
d)	Vergleichen und in WS übertragen	GA/ UG

Mögliche HA: Unbearbeitete Vertiefenaufgabe aus **V1-V12**

O4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- nutzen die Strategie „Zu viel zählen und Doppelte zusammenfassen“ und erklären sie an Bäumen.

O4 Bezug

Nicht im Basisweg, nach **E4**. Weiter mit **V13-V16** oder **E5**.

O4 Umsetzungsvorschlag (25 min)

a)	Wenden die neue Strategie schrittweise auf die eigene Lösung an.	EA
b)	Zuordnen der Rechenterme zum Lösungsweg aus a) . Erklärungen verschriftlichen und Strategie begründen.	EA
c)	Anwenden der neuen Strategie auf ein neues Problem.	EA/ PA
d)	Vergleichen und Ergebnisse in den Wissensspeicher übertragen.	GA

Mögliche HA: Aus **V13-V16**

Intensivzugriff

O3 Umsetzungshinweise/Alternativen

Vor allem sollte der multiplikative Charakter gut in den Listen und Bäumen erkannt und abgrenzende Beispiele thematisiert werden, damit keine Übergeneralisierung stattfindet. Auch hier können wieder eigene Rechenansätze gesammelt und den Aufgaben zugeordnet und geprüft werden, um für Lernende mit Problemen ein geschlosseneres Format zu haben.

Hier ist die Moderation wichtig Beispiel (3) ist hier nicht durch eine Rechnung darstellbar, später in **O4** schon (vgl. auch ausgefüllter Methodenspeicher).

O3 Erwartungshorizont

3ab) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (Multiplikation der Möglichkeiten bei jedem Schritt).

c) Es gibt keine einfache Multiplikation, wie in **a)**, weil die Anzahlen innerhalb der 2. Ebene verschieden sind. Das liegt an der Beachtung/ nicht Beachtung von Reihenfolgen. Ein Baumdiagramm mit einfacher Multiplikation hat in einem Schritt gleich viele Möglichkeiten.

O4 Umsetzungshinweise/Alternativen

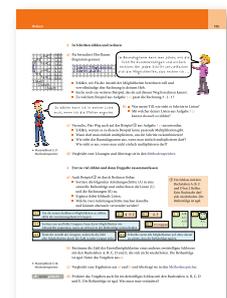
Die Schritte A1 und A3 sind alternativ in dem Sinn, das man entweder die Zahl der gebildeten Gruppen zählt oder durch Division der Gesamtzahl durch die Anzahl der Elemente in einer Gruppe bestimmt. Die Kraft entfaltet die Strategie „Zu viel zählen und Doppelte zusammenfassen“ nur in der zweiten Version. Dieser Nutzen kann mit den Beispielen oder mit **V15** reflektiert werden.

O4 Erwartungshorizont

4a) A4R2L1, A2(R2)L2 (ohne Markierung), dann A3L2R1 oder A1L2R3.

4b) Es gibt $5 \cdot 4 : 2$ Möglichkeiten (entsprechende Listen und Verbalisierungen).

4c) Es gibt zunächst analog $5 \cdot 4 \cdot 3$ Möglichkeiten. Von diesen sind 6 bis auf die Reihenfolge gleich.



Vertiefen 1 Möglichkeiten systematisch zählen

Hintergrund	In den Vertiefenaufgaben V1-V6 wird die systematische Liste als zentrales Mittel zur Bestimmung von Möglichkeiten etabliert. In V1, V2 wird das Erstellen von (zunehmend systematischen) Listen bewusst angeregt. In V3-V5 sollen die Lernenden eigenständig auf Listen zur Lösung der kombinatorischen Probleme zurückgreifen. Denn wenn Lernende statt der Listen rechnerische Ansätze wählen, so wird die Situation oft nicht adäquat mathematisiert. Hier lohnt es sich, die Vorteile der Liste zu akzentuieren: Man kann sich die Situation anhand der konkreten Möglichkeiten besser vorstellen und die Passung mit dem gewählten Weg der Anzahlbestimmung überprüfen. Wenn Lernende schon vorzeitig dazu übergehen, Rechnungen zu nutzen, lohnt es sich, diese mit einer Liste zu validieren.
--------------------	---

V1 Ziel: Zahl der Stellen und Möglichkeiten pro Stelle mit systematischen Listen reflektieren

Dauer 25-35 min

Bezug Nach **O1**, auch nach **E1** möglich. Als **HA** geeignet.

Hinweise Training; Die Rolle der Zahl der Stellen und der Möglichkeiten pro Stelle sollen die Lernenden in **a)** zunächst offen reflektieren, um sie dann mit der Erfahrung bei variierender Stellenzahl und variierender Möglichkeiten pro Stelle tiefer zu durchdringen. In **e)** und in gemeinsamen Besprechung soll besonders die Frage reflektiert werden, woran man vollständige Listen erkennt.

Lernwege Hier werden die Lernenden durch die operative Variation der Aufgabe angeregt, Strukturen in den Listen zu reflektieren und Listen systematischer anzufertigen. Einige Lernende können für die hier behandelte einfachste Grundsituation „mit Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge“ auch den Rechenweg Multiplikation der Stellen und der Möglichkeiten pro Stelle entwickeln. Es empfiehlt sich dann, immer wieder das Validieren mit Listen anzuregen.

V2 Ziel: Verschiedenartige Zählprobleme gegenüberstellen und systematische Listen erstellen

Dauer 20-25 min

Bezug Nach **E1** und **O1**. Als **HA** geeignet.

Hinweise Bei Bedarf allgemein anregen, die Passung der Informationen in der Aufgabe zur erstellten Liste noch einmal konkret zu überprüfen. Die Lehrkraft liest z.B. den Aufgabentext noch einmal akzentuiert vor und die Lernenden kontrollieren, die eigene Liste oder die des Partners.

Lernwege Die in **O1** erarbeitete Strategie „systematisch aufschreiben“ kann hier zum Bilden verschiedener Gruppen führen. Alle Gruppierungen sind zunächst gut, da sie systematischere Notationen darstellen. Die Herausforderung wird dabei von einigen Lernenden in der Reflexion oft erkannt.

V3 Ziel: Systematische Listen zum Explorieren von Situationen nutzen

Dauer 15-20 min

Bezug Nach **E1** und **O1**. Als **HA** geeignet.

Lernwege Hier wird nicht mehr explizit zum Erstellen von Listen aufgefordert. Damit kann hier das Problem auftreten, dass Lernende vorschnell unverstandene Rechenwege nutzen, ohne inhaltlich zu validieren. Beispiel:

Es empfiehlt sich hier und immer wieder den heuristischen Nutzen der Listen hervorzuheben, als Mittel zum besseren Verständnis der in der Aufgabe gegebenen Situation.

Neben Listen können vereinzelt auch andere Darstellungen auftauchen (Bilder oder Tabellen).

V4 Ziel: Systematische Listen zur Lösung von kombinatorischen Problemen nutzen**Dauer**

10-15 min

BezugNach **O1**. Als **HA** geeignet.**Hinweis**

V4 und **V3** können parallel und differenziert nach Interesse in Bezug auf den Inhalt bearbeitet werden. Der 2. Aufgabenteil ist herausfordernd bzgl. der Zahl der in einer Farbe vorhandenen T-Shirts und Röcke. Durch Anbieten einfacher Notationen wie R1G2 (bedeutet: das rote T-Shirt Nr. 1 anziehen, grüner Rock Nr.2) kann das Problem einer übersichtlicheren Bearbeitung in Listenform zugänglich gemacht werden.

V5 Ziel: Systematische Listen erstellen und an die Situation anpassen**Dauer**

10-15 min

BezugNach **O1**.**Hinweis**

Auch in **V5** müssen die Lernenden die Aufgabenstellung in Bezug auf die Vorgaben durchschauen: Wann sind zwei Superduos verschieden, wann sind sie gleich? Scan 1 lässt die Herausforderung erahnen. Im zweiten Scan sieht man, wie sie durch Rekurs auf ein Beispiel aufgelöst wurde.

Handwritten notes on grid paper:

- a) $4 \cdot 5 = 20$ Man hat 20 Stimmen
- b) $5 \cdot 5 = 25$ c) ist wie viele Stimmen es sind. b) ..
- c) In a) ist z.B. $3 \leftrightarrow 4$ etwas anderes als $4 \leftrightarrow 3$ bei b) nicht

V6 Ziel: Systematische Listen zu ungewohnten kombinatorischen Problemen erstellen**Dauer**

15-20 min

BezugNach **O1**.**Hinweis**

Die anspruchsvolle Reflexion in **c)** kann gut Charakteristika des Problems herausstellen, die alle Lernenden zur Kontrolle ihrer Listen nutzen können: Es sind immer gleichviele „H“s und „L“s in jedem Element der Listen, alle Einträge müssen gleich lang sein und es müssen immer LL vorkommen. Wer sehr viel weiterdenkt, könnte mit dem Problem „Auf wie viele Arten kann man 6 Kugeln, 2 Kugeln mit L, 4 Kugeln mit H anordnen?“ verknüpfen bzw. von der Lehrkraft dazu angeregt werden.

Lernwege

Hier kann mit Bildern, also mit der Karte, oder mit Listen gearbeitet werden. Der Nutzen der Listen zum Schaffen von Überblick ist im Vergleich zu den Bildern gut erfahrbar.

Vertiefen 2 Möglichkeiten im Baumdiagramm darstellen und rechnen**Hintergrund**

In den Vertiefenaufgaben **V6-V9** wird das Baumdiagramm als Mittel zur bewussten Akzentuierung von Schritten etabliert. In **V10-V12** findet dann der explizite Übergang zur Bestimmung von Möglichkeiten mit Rechnungen statt. Weiterhin sollten parallel Listen oder Baumdiagramme genutzt werden, um aufgestellte Rechnungen inhaltlich zu validieren.

V7 Ziel: Baumdiagramme untersuchen und interpretieren**Dauer**

20-25 min

BezugNach **E2** oder **O2**. Als **HA** geeignet, wenn nachbesprochen.**Hinweise**

In **a)** sollen die Charakteristika der Grundsituationen im Baumdiagramm identifiziert werden (in (1) kann eine Ziffer wiederholt vorkommen, in (2) sind Wiederholungen ausgeschlossen und die Reihenfolge ist egal, da nur sich in der Reihenfolge unterscheidende Möglichkeiten zusammengefasst werden). Die anderen Teilaufgaben vertiefen das Verständnis der Baumdiagramme durch Darstellungswechsel.

Basisaufgabe **V7** Ziel: Baumdiagramme untersuchen und interpretieren**Dauer**

20-25 min

BezugNach **E2** oder **O2**. Als **HA** geeignet.**Hinweise**

Geschlossener Variante von **V7**. In **a)** werden den Lernenden Sprachmittel für das Verbalisieren der Ergebnisse an die Hand gegeben, in **b)** und **c)** wird durch vorgegebene Situationen unterstützt. In **d)** wird durch die Vorgabe der Schritte und einer konkreten Zahl für den ersten Schritt angeschoben, so dass die Lernenden diesen anspruchsvollen Darstellungswechsel leisten können.

Dauer	V8	Ziel: Baumdiagramme zeichnen und operativ variieren
Bezug	15-25 min	
Hinweise	Nach O2 . Als HA geeignet. Die Rolle der Schritte und der Möglichkeiten pro Schritt, die in V1 in der Form von Listen erkundet wurden, werden hier an den Baumdiagrammen festgemacht.	
Dauer	V9	Ziel: Listen und Baumdiagramme statt Rechnungen nutzen
Bezug	15 min	
Hinweise	Nach O2 . Als HA geeignet. Falls Lernende vorschnell ohne inhaltliche Validierung des Ansatzes Rechnungen aufstellen, ist dieses nicht über einen rechnerischen Zugang zu bewältigende Problem ein Anlass Listen und Baumdiagramm wieder zu reaktivieren und deren Nutzen zu erfahren. Da hier neu überlegt werden muss, wie die Listen strukturiert und wie die Situation dargestellt werden könnte, ist die Aufgabe produktiv. Auch die Einsicht, dass die Reihenfolge der Münzen für die Stückelung egal ist, entwickeln nicht alle spontan. <i>Differenzierung:</i> Herausfordernd und produktiver wird die Aufgabe bei größeren Geldbeträgen.	
Basisaufgabe	V9	Ziel: Listen mit Hilfe von Baumdiagrammen systematischer gestalten
Dauer	15 min	
Bezug	Nach O2 . Als HA geeignet.	
Hinweise	Die Basisaufgabe sollten Lernende bearbeiten, die noch Probleme haben, systematische Listen zu erstellen. Hier wird explizit die strukturierende Kraft der Baumdiagramme genutzt, um zu wenig strukturierte Listen zu restrukturieren. Die erneute Bearbeitung in b) in einer anderen Darstellung regt an, nochmal genauer zu sortieren. Nützlich ist auch der wiederholte Einsatz des Impulses „Woran siehst du denn, ob deine Liste vollständig ist?“, der Strukturen von Listen bewusster macht bzw. die Strukturierung anregt.	
Dauer	V9	Ziel: Anzahl möglicher Anordnungen mit Listen und Rechnungen bestimmen
Bezug	15-20 min	
Hinweise	Nach O3 . Die kombinatorische Grundsituation zu Anordnungen einer Menge vorgegebener Gegenstände kann in der Aufgabe mit Listen erkundet und eine Rechenregel entwickelt werden, ohne rezepthaft mit Formeln zu arbeiten.	
Basisaufgabe	V10	Ziel: Anzahl möglicher Anordnungen mit Listen und Rechnungen bestimmen
Dauer	20-25 min	
Bezug	Nach O3 . Wie V10 , doch wird durch vorgegebene Satzbausteine und Denkschritte die Entwicklung des Rechenansatzes unterstützt. In c) werden weitere Beispiele zum Durcharbeiten angeboten.	
Dauer	V11	Ziel: Entwicklung von rechnerischen Ansätzen für bearbeitete Aufgaben
Bezug	(abhängig von der Anzahl der Aufgaben, die bereits rechnerisch gelöst wurden)	
Hinweise	Nach O3 . Die Aufgabe soll die Entwicklung von rechnerischen Ansätzen, aber auch das Begründen und insbesondere Validieren dieser Ansätze anregen. Die Kontrollfragen auf dem Rand sollten hier und in weiteren Aufgaben genutzt werden, um vorschnelle rechnerische Ansätze zu validieren. Zentral sind dafür Checkfrage 2 und 3, die das Generieren einer Liste anregen, an der die rechnerischen Zusammenhänge validiert werden können und die zwischen der Situation und der Rechnung vermitteln kann. In Teilaufgabe b) sollen die Lernenden selbst Beispiele erstellen und bewusst abgrenzende Beispiele suchen, zu denen sie keine Rechnung finden.	
Basisaufgabe	V11	Ziel: Entwicklung von rechnerischen Ansätzen für bearbeitete Aufgaben
Dauer	(abhängig von der Anzahl der Aufgaben, die bereits rechnerisch gelöst wurden)	
Bezug	Nach O3 , weiter mit V12 , V13 , V14 .	
Hinweise	Wie V11 , doch wird durch vorgegebene Satzbausteine und Schritte die Entwicklung des Rechenansatzes beispielhaft unterstützt.	

	V12	Ziel: Nutzung der Strategie einfachere Fragen stellen
Dauer	10-15 min	
Bezug	Nach O3 .	
Hinweise	Nach der Erarbeitung von Rechenansätzen soll in dieser Aufgabe das bewusste Nutzen von Listen als heuristisches Mittel zur Entwicklung von Rechenansätzen auch für komplexere Probleme entwickelt werden. Um die komplexe Aufgabe einer Bearbeitung zugänglich zu machen, werden zu einfacheren Aufgaben Listen generiert, die eine Übertragung auf die komplexere Aufgabe möglich machen.	

Vertiefen 3 Erst zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen

Hintergrund	Die Etappe widmet sich ausschließlich der Vertiefung der Zählstrategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“, so dass diese Etappe im Basisweg ausgespart werden kann. Lernende im Basisweg arbeiten an den bekannten Situationen und Strategien mit den hier eingefügten Basisaufgaben V13 , V14 und nutzen das Zusatztraining sowie V17-V22 . Für die stärkeren Lernenden wird in V13 , V14 die Zählstrategie „Zu viel zählen und Doppelte zusammenfassen“ noch einmal mit anderer Darstellung und in bekannten Kontexten erfahrbar gemacht. In V15 soll das bekannte Phänomen des Lottos mit Hilfe dieser Zählstrategie erschlossen werden. V16 soll eine Übergeneralisierung verhindern, da hier die Strategie nicht ausreicht.
--------------------	---

	V13	Ziel: Erleben des Nutzens von Zählstrategien in anderen Situationen
Dauer	15 min	
Bezug	Nicht im Basisweg. Nach E4 , O4 . V13ab) als HA geeignet.	
Hinweise	Die Teilaufgaben adressieren die Strategien (1) des Nutzens von Gruppen, (2)-(7) das Ausnutzen der multiplikativen Struktur (hier des Rechtecks), sowie „Zu viel Zählen und dann Doppelte zusammenfassen“ (hier sind es leere Kästchen, die zuvor mitgezählt werden können, um die Multiplikation zu nutzen und dann wieder herausgeteilt werden. In (6) und (7) außerdem „einfachere Fragen stellen“.	
Lernwege	Oft werden die Strategien nicht sofort oder bewusst genutzt. An der Aufgabe lohnt es daher, über Strategienutzung gemeinsam zu reflektieren.	

Basisaufgabe	V13	Ziel: Zuordnen von Zählproblemen in verschiedenen Darstellungen
Dauer	15 min	
Bezug	Nach O3 . V13a) als HA geeignet. (gehört nicht zu E4/O4 , sondern trainiert die Vernetzung der Darstellungen in den einfacheren Grundsituationen)	
Hinweise	Inhaltlich ist diese Aufgabe anders als in V13 . Da im Basisweg Aufgabe V13-V16 nicht bearbeitet werden, kann V13 den Start der Wiederholung und systematischen Verknüpfung der erarbeiteten Zählstrategien und Darstellungen einleiten. Dieser Strang für die Basisversion wird in V14 aufgegriffen. Danach kann mit dem Zusatztraining sowie V17-V22 weiter geübt werden. Durch das geschlossene Format kann die Aufgabe gut bearbeitet werden, es empfiehlt sich die Tragfähigkeit der Begründungen im Auge zu behalten.	

	V14	Ziel: Zählstrategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“ nutzen
Dauer	15-20 min	
Bezug	Nach O4 . V14ab) als HA geeignet.	
Hinweise	Im Fokus steht die angeleitete Anwendung der Zählstrategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“, die in b) explizit angeregt wird. Darüber hinaus kann die Situation auch additiv strukturiert werden, was durch die letzte Frage in a) angeregt wird: Es kommen immer $n-1$ Linien (also gerade die Verbindungslinien des neuen Punktes mit allen alten Punkten) hinzu. Mit dieser Einsicht lässt sich ebenfalls eine Berechnung aufstellen ($1 + 2 + 3 + \dots + n - 1$ für ein n -Eck), die für Aufgaben mit zwei gleichwertigen Möglichkeiten ausreicht, aber bei Zählproblemen, bei denen drei oder mehr gleichwertige Möglichkeiten vorliegen nicht mehr trägt.	

Basisaufgabe	V14	Ziel: Nutzung von Listen und Strategien, um undurchsichtige Probleme aufzuschließen
Dauer	20-25 min	
Bezug	Nach O3 . Als HA geeignet. (gehört nicht zu E4/O4 , sondern trainiert die Vernetzung der Darstellungen in den einfacheren Grundsituationen)	
Hinweise	Während die Stärkeren an der neuen Zählstrategie arbeiten, wird im Basisweg weiter daran gearbeitet, bewusst Strategien zum Aufschließen von nicht ganz transparenten Situationen zu nutzen, um vor-schnelle Rechenansätze zu verhindern und eine konkrete Alternative zu bieten.	
	V15	Ziel: Nutzung der Strategie „einfachere Fragen stellen“ um komplexe Probleme zu lösen
Dauer	20-25 min	
Bezug	Nicht im Basisweg. Nach O4 . Nicht in der Basisversion.	
Hinweise	Das klassische Lotto ist hier der Anlass die Strategie „auf einfachere Probleme zurückführen“ zu nutzen. Dazu bearbeiten die Lernenden in a) ein einfaches Problem, dass in b) operativ variiert wird, so dass in c) ein allgemeiner Ansatz zur Berechnung der Möglichkeiten entwickelt werden kann (methodisch z.B. in der Form einer Mathekonzferenz). Der entwickelte Rechenansatz kann dann in d) genutzt werden, um das LOTTO-Problem zu lösen.	
	V16	Ziel: Erarbeitung der Grenzen der Strategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“
Dauer	15-20 min	
Bezug	Nicht im Basisweg. Nach O4 . Als HA geeignet.	
Hinweise	Die Aufgabe soll die Grenzen des Aufstellens von Rechnungen und insbesondere der Strategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“ fassbar machen. Dazu wird das Ziehen mit Wiederholung ohne Beachtung der Reihenfolge genutzt. An der Liste in b) soll erkannt werden, dass nicht alle Möglichkeiten gleich oft vorkommen und deshalb die Strategie „Zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“ höchstens modifiziert angewendet werden kann.	

Vertiefen 4 Möglichkeiten in unterschiedlichen Situationen

Hintergrund	In dieser Etappe wird vermischt auch mit nicht so komplexen Problemen geübt. In V17 , V18 werden die lebensweltlich wichtigsten Kontextprobleme des Kapitels erkundet, in denen das Generieren von vielen Möglichkeiten essentiell ist. V19 , V20 dienen der Vernetzung verschiedener Darstellungen Liste Rechnung, Baum, Situation, zum Teil auch der Unterscheidung von verschiedenen Typen von Zählproblemen. V21 vernetzt verschiedene Zählprobleme in einem anderen Beispielkontext. In V22 besteht abschließend die Chance in einer Spielsituation über die Anzahl an Möglichkeiten zu bestimmen. Insbesondere die Aufgaben V17-V20 sind auch im Basisweg relevant.	
	V17	Ziel: Üben des Bestimmens von Möglichkeiten im wichtigsten authentischen Kontext
Dauer	10 min	
Bezug	Zum abschließenden Üben für alle (auch im Basisweg).	
Hinweise	Wenn das Hineinsehen von Schritten geläufig ist, ist die Aufgabe kein Problem. Sonst hilft die Strategie des systematischen Aufschreibens. Die Anzahl der Buchstaben im Alphabet kann vorher kurz im Plenum geklärt werden (sonst hilft auch eine Liste).	
	V18	Ziel: Üben des Bestimmens von Möglichkeiten im wichtigsten authentischen Kontext
Dauer	15-20 min	
Bezug	Zum abschließenden Üben für alle (auch im Basisweg).	
Hinweise	Aufgrund der großen Zahlen und der Verschiedenheit der kombinierten Objekte steht hier das Hineinsehen von Stufen und das Aufstellen von Rechnungen besonders im Fokus. Darüber hinaus ist das Lernen im und über den Kontext wesentlich und lädt zum Weiterdenken oder Recherchieren ein.	

V19	Ziel: Vernetzen der verschiedenen Darstellungen
<i>Dauer</i>	15-20 min
<i>Bezug</i>	Zum abschließenden Üben für alle (auch im Basisweg).
<i>Hinweise</i>	Der Wechsel zwischen den Darstellungen soll spielerisch geübt werden. Produktiv ist, dass bestimmte Darstellungswechsel eindeutig sind, während andere viel Raum lassen, nämlich die Wechsel zu den weniger strukturierten Darstellungen, insofern viele Listen und insbesondere Situationen zu einer Rechnung möglich sind. Hier steckt auch das diagnostische Potential des Spiels: Gelingen die Darstellungswechsel in allen Richtungen? Wenn vorher gut besprochen wird, wie die Zettel eingeteilt werden sollen und passendes Papier genutzt wird, können die Lernenden dann selbständig arbeiten.
V20	Ziel: Vernetzen der verschiedenen Darstellungen und Abgrenzen der Modellannahmen
<i>Dauer</i>	15-25 min
<i>Bezug</i>	Zum abschließenden Üben für alle (auch im Basisweg).
<i>Hinweise</i>	Potentiell spielerisches Üben der Vernetzung der Darstellungen. Es empfiehlt sich die erstellten Karten durch andere überprüfen zu lassen bzw. auch selbst zu schauen. Gut ist es, wenn man immer mit fremden Karten spielt, das zwingt eher zur genauen Kontrolle.
V21	Ziel: Vernetzen der verschiedenen Darstellungen und Abgrenzen der Modellannahmen
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Zum abschließenden Üben für alle nach V13-V16 (nicht im Basisweg).
<i>Hinweise</i>	Offene Aufgabe, die verschiedene Modellierungen zulässt, die sich aber durch die etablierten Beschreibungen (darf (nicht) doppelt vorkommen, Reihenfolge ist wichtig/ egal) gut beschreiben lassen. Hier ist es wichtig, dass die Annahmen, von denen ausgegangen wird, auch explizit gemacht werden.
V22	Ziel: Möglichkeiten bei verschiedenen Modellannahmen spielerisch bestimmen
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Zum komplexen Üben für alle nach V13-16 (nicht im Basisweg).
<i>Hinweise</i>	Im Kontext des bekannten Spiels, bei dem es ja gerade darum geht, Möglichkeiten geschickt zu erschließen, sollen diese Möglichkeiten in verschiedenen Varianten bestimmt werden. Natürlich darf auch einfach gespielt werden. Einen Spielplan können die Lernenden schnell selbst erstellen, indem sie das Bild im Buch als Tabelle ins Heft übertragen.

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- nutzen die Problemlösestrategien „Problem zerlegen“ und „Zurückführen auf Bekanntes“ zur Bestimmung von Möglichkeiten.
- kontrollieren ihre Berechnungen mit Listen oder an vereinfachten Situationen.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- präsentieren ihre Lösungswege und diskutieren sie mit anderen.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Sprechen und Schreiben: Die folgenden (ggf. schon aus anderen Kapiteln bekannten) Wörter und Satzbausteine sollten Lernende dauerhaft aktiv nutzen können:

- ich stelle einen Code ein,
- ich finde alle Möglichkeiten mit einer Liste/ eines Baumdiagrammes/ einer Rechnung,
- ich schreibe eine Liste aller Möglichkeiten auf,
- ich bilde Gruppen/ ich schreibe geordnet auf,

- ich zähle in Schritten,
- es gibt drei Möglichkeiten für die zweite Stelle,
- es sind vier Möglichkeiten im dritten Schritt,
- ich zeichne schrittweise die Möglichkeiten in dem Baumdiagramm auf,
- wenn an der ersten Stelle ein A steht, dann dürfen an der zweiten Stelle nur noch B oder C stehen,
- es bleiben als Möglichkeiten nur noch B und C übrig,
- „14“ gilt hier als das gleiche wie „41“,
- ich fasse gleiche Möglichkeiten in einer Gruppe zusammen,
- die Reihenfolge ist egal,
- bei jedem Schritt vervielfachen sich die Möglichkeiten mit 3, denn ich habe jeweils drei Möglichkeiten,
- ich zähle zu viel und fasse dann Doppelte zusammen.

Lesen und Zuhören: Diese neuen Fachwörter und inhaltlich tragenden Wörter sollten die Lernenden dauerhaft verstehen können:

- sie stellen einen Code ein,
- sie arbeiten die Stellen systematisch ab,
- die Anzahl der Möglichkeiten halbiert sich.

Die Hinweise beziehen sich auf die Aufgaben im Schulbuch. Alternativ kann mit den zusätzlichen Trainingsaufgaben im Onlinebereich von Cornelsen geübt werden.

134



Sicherheit von Zahlenschlössern – Möglichkeiten geschickt zählen

Checkliste **Sicherheit von Zahlenschlössern – Möglichkeiten geschickt zählen**

Ich kann ...
Ich kenne ...

Hier kann ich
üben ...

- | | | | |
|-----------|--|--|--|
| K1 | <p>Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „systematisches Aufschreiben von Listen“.
Erstelle systematische Listen.</p> <p>(1) Wie viele verschiedene Bekleidungsmöglichkeiten haben die Mädels, wenn sie ihre Hosen (H1, H2, H3, H4) und T-Shirts (T1, T2, T3, T4) beliebig miteinander kombinieren?</p> <p>(2) Wie viele Möglichkeiten haben die vier Mädels Lena, Selma, Maja und Paula, sich für ein Selfie nebeneinander zu setzen?</p> |  | <p>S. 126 Nr. 1, 2
S. 127 Nr. 3–6
S. 131 Nr. 16</p> |
| K2 | <p>Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „systematisches Zeichnen von Baumdiagrammen“.
Erstelle für die Fragen (1) und (2) von oben zwei Baumdiagramme.
Wie verändert sich das Baumdiagramm in (1), wenn die Vier auch ihre Schuhe tauschen würden?</p> | | <p>S. 128 Nr. 7–9
S. 129 Nr. 10</p> |
| K3 | <p>Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen mit der Strategie „in Schritten zählen und rechnen“.
Wie kannst du mit Multiplizieren die Fragen (1) und (2) von oben lösen?
Zu welcher Frage könnte die Multiplikation $2 \cdot 3 \cdot 4$ gehören?</p> | | <p>S. 128 Nr. 8
S. 129 Nr. 10–12
S. 132 Nr. 17, 18
S. 133 Nr. 20</p> |
| K4 | <p>Ich kann schwierige Zählprobleme lösen, indem ich einfachere Fragen stelle.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ In einem Sack befinden sich sechs nummerierte Kugeln. Du ziehst zwei Kugeln auf einmal heraus. Wie viele verschiedene mögliche Ergebnisse gibt es? Löse das Problem durch die Strategie „erst zu viel zählen und dann Doppelte zusammenfassen“. ■ Warum kannst du Frage (2) von oben nicht mit dieser Strategie bearbeiten? | | <p>S. 130 Nr. 13, 14
S. 131 Nr. 15, 16</p> |

► *Hinweis:* Im Materialblock auf Seite 65 findest du diese Checkliste für deine Selbsteinschätzung. Zusätzliche Übungsaufgaben findest du im Internet unter www.cornelsen.de/mathewerkstatt unter 134-1. (Buchkennung: MWS040036, Mediencode: 134-1)

Basiskompetenzen, die in der Übe-Kartei für das spätere Vertiefen aufgegriffen werden:

K1-3 Ich kann Möglichkeiten geschickt zählen durch Zeichnen von Baumdiagrammen und Zählen in Schritten.

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**:
<http://www.ko-si-ma.de> → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 9,
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040036):
www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 9 oder mathewerkstatt 5.

	Kombinatorisches Denken 1	Bild der Einstiegsseite (SB KOSIMA)
	Kombinatorisches Denken 2	Basisaufgabe <i>Sicherheit von Schlössern</i> (SB E1 MB)
	Kombinatorisches Denken 3	Methodenspeicher <i>Problemlösen 7</i> (SB O1/O2/O3 MB)
	Kombinatorisches Denken 4	Ausgefüllter Methodenspeicher <i>Problemlösen 7</i> (SB O1/O2/O3 KOSIMA)
	Kombinatorisches Denken 5	Methodenspeicher <i>Problemlösen 8</i> (SB O4 MB)
	Kombinatorisches Denken 6	Ausgefüllter Methodenspeicher <i>Problemlösen 8</i> (SB O4 KOSIMA)
	Kombinatorisches Denken 7	Basisaufgabe <i>Schlösser und Baumdiagramm</i> (SB V7 MB)
	Kombinatorisches Denken 8	Basisaufgabe <i>Mit Baumdiagrammen Listen überarbeiten</i> (SB V9 MB)
	Kombinatorisches Denken 9	Basisaufgabe <i>Geeignete Schritte finden</i> (SB V10 MB)
	Kombinatorisches Denken 10	Basisaufgabe <i>Kann man kürzer rechnen?</i> (SB V11 MB)
	Kombinatorisches Denken 11	Basisaufgabe <i>Welche Situationen, Listen, Rechnungen und Baumdiagramme gehören zusammen?</i> (SB V13 MB)
	Kombinatorisches Denken 12	Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 134-1)
	Kombinatorisches Denken 13	Checkliste zum Ausfüllen (SB MB & CORNELSEN)