

Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen



Didaktischer Hintergrund zum Kapitel.....ab Seite 2
Einstieg.....ab Seite 6
Erkunden.....ab Seite 8
Ordnen.....ab Seite 12
Vertiefen.....ab Seite 16
Kompetenzen und Checkliste.....ab Seite 19
Materialübersicht für dieses Kapitel.....ab Seite 21

Herausgegeben von:

Stephan Hußmann
Bärbel Barzel
Susanne Prediger
Timo Leuders

Autoren:

Stephan Hußmann

Redaktion:

Raja Herold

© 2015 Kosima-Projekt:

Zitierbar als Hußmann, Stephan (2015): Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen. In: Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (Hrsg.): *Handreichungen zur Mathewerkstatt 8*. Dortmund/ Freiburg/ Essen: Kosima. Online unter www.ko-si-ma.de

© 2015 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin:

Das Copyright gilt für alle dargestellten Seiten und Auszüge von Seiten des Schülerbuches und des Materialblocks der *mathewerkstatt*; Rechteinhaber und Bildquellen sind in den entsprechenden Bildnachweisen dieser Produkte ausgewiesen.

Titel Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen

Thema Wahrscheinlichkeit

Kontexte – Kernfragen – Kernideen

Zufällige Ereignisse sind auf kurze Sicht nicht voraussagbar, dennoch kann man auf lange Sicht Muster sehen. Diese Einsicht ist Voraussetzung für den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, die in diesem Kapitel erlebbar gemacht und reflektiert werden. Immer, wenn der Zufall Muster zeigt, kann man das Eintreffen von Ereignissen quantifizieren. Je nach Zufallsgerät ist dies allein mit theoretischen Überlegungen möglich oder es bedarf einer empirischen Fundierung mit Hilfe entsprechender Versuchsreihen.

Als Kontext für die Berechenbarkeit von Wahrscheinlichkeiten als Vorhersage für spezifische Ausgänge von Zufallsversuchen dient das Spiel „Die beste Wahl gewinnt“. In diesem Spiel müssen Zufallsgeräte und Ereignisse mit möglichst großen Wahrscheinlichkeiten ausgewählt werden, um zu gewinnen. Grundlage für die Wahl ist die Einschätzung der Wahrscheinlichkeiten, die entweder empirisch oder theoretisch gewonnen werden können. Dazu untersuchen die Lernenden verschiedene Zufallsgeräte und lernen die Laplace-Wahrscheinlichkeit kennen. Bei Zufallsgeräten mit gleichwahrscheinlichen Ereignissen sollen sie sich aneignen, die Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für das Eintreffen von bestimmten Ereignissen theoretisch zu bestimmen.

Kernfrage A: Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Nach einer Spielphase, in der die Lernenden Erfahrungen zum Umgang mit Zufallsgeräten und der Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten (oder Chancen im Spielkontext) sammeln, folgt eine zweite Phase, in der die Zufallsgeräte genauer untersucht werden. Dabei zeigen sich die folgenden Kernideen handlungsleitend:

1. Wahrscheinlichkeiten für Zufallsgeräte, bei denen es überhaupt keine gleichwahrscheinlichen Ereignisse gibt, lassen sich nur empirisch bestimmen.
2. Wahrscheinlichkeiten für Zufallsgeräte, bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, lassen sich mit der Laplace-Formel theoretisch bestimmen.
3. Wahrscheinlichkeiten für teilsymmetrische Zufallsgeräte lassen sich aus einer Mischung von theoretischen und empirisch gestützten Überlegungen bestimmen.

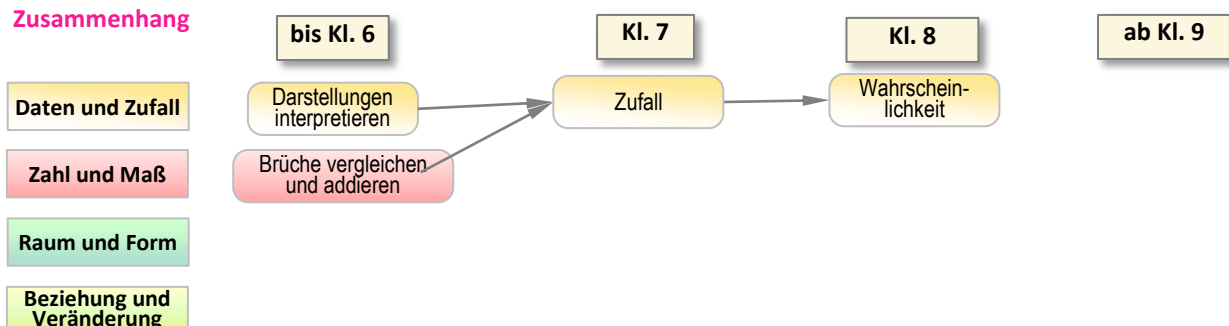
Zur Kategorisierung werden zwei Wege zur Verfügung gestellt: ein offener Weg, der die Planung und Durchführung der Untersuchung der Zufallsgeräte in die Hände der Lernenden legt (E3) und eine Variante (E4-E7), in der die einzelnen Zufallsgeräte Schritt für Schritt untersucht werden.

Daran anschließend werden Wahrscheinlichkeiten für zweistufige Zufallsversuche bestimmt und mit Hilfe von Rechteckbildern und Baumdiagrammen visualisiert.

Kompetenzen

- K1: Ich kenne alltägliche Ereignisse, die sehr unwahrscheinlich eintreten, und solche, die sehr wahrscheinlich eintreten.
 K2: Ich kann die Wahrscheinlichkeiten von Zufallsgeräten vergleichen, indem ich häufig genug werfe und so eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit praktisch bestimmen.
 K3: Ich kann bei Zufallsgeräten entscheiden, ob man mit ihnen einen Laplace-Versuch durchführen kann, und in solchen Fällen die Wahrscheinlichkeiten allein durch Überlegen bestimmen.
 K4: Ich kann bei Zufallsgeräten entscheiden, ob ich die Wahrscheinlichkeiten besser theoretisch durch Überlegen oder praktisch durch Probieren bestimme.
 K5: Bei Zufallsgeräten, bei denen einige Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, kann ich die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch Überlegen verbessern.
 K6: Ich kann bei Laplace-Versuchen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen, die mehrfach vorkommen.
 K7: Bei Zufallsversuchen mit zwei Schritten kann ich Wahrscheinlichkeiten berechnen und mit einem Baumdiagramm darstellen.

Zusammenhang



Struktur

ca. 2 Wochen

Einstieg: Eindenken in das Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten von Zufallsgeräten						
A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?					E	O
E1	Im Spiel erste Erfahrungen mit theoretischen und empirischen Gewinnchancen machen		V1, V2	Wahrscheinlichkeiten einschätzen	45	
E2	Erfahrungen aus dem Spiel sammeln, erste Ideen zur Quantifizierung von Gewinnchancen entwickeln	O1	Den Begriff der Wahrscheinlichkeit charakterisieren		30	15
E3	Zufallsgeräte sortieren, Gewinnchancen mit Hilfe von theoretischen Überlegungen oder Versuchsreihen bestimmen (für starke Lerngruppen E3 statt E4-E6)		V3 V3 V4-V8	Wahrscheinlichkeiten praktisch bestimmen	60	
E4	Gewinnchancen praktisch vergleichen mit prozentualen Häufigkeiten	O2	Wahrscheinlichkeiten praktisch bestimmen		20	15
E5	Gewinnchancen praktisch vergleichen, wenn einige Seiten gleich sind					
E6	Gewinnchancen theoretisch vergleichen mit Hilfe von Überlegungen	O3	Wahrscheinlichkeiten theoretisch bestimmen	V9 V9 V10, V12 V11 V11	15	45
E7	Die gemachten Erkenntnisse/ Zufallsgeräte/ Bestimmungsarten von Gewinnchancen sortieren	O4	Wahrscheinlichkeiten praktisch oder theoretisch bestimmen	V13-V18	15	25
E8	Erkenntnisse beim erneuten Spielen nutzen und reflektieren		V19-V23	Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse, die mehrfach vorkommen	20	
E9	Im Spiel Gewinnchancen für zweistufige Zufallsversuche bestimmen und ausprobieren	O5	Wahrscheinlichkeiten für zwei Zufallsgeräte bestimmen	V24-V26	25	30

Kurzweg:

- Ohne Einstieg, nach E1-E2 (evtl. E3) direkt mit O weitermachen;
- bei starken Lerngruppen deckt E3 die Aufgaben E4-E6 ab;
- alternativ lässt man bei schwächeren Lerngruppen E3 aus und arbeitet direkt mit E4-E7.

Intensivzugriff

Hintergrund

Der Kontext, im Spiel die Gewinnchance verschiedener Zufallsgeräte zu schätzen und sie dann auf verschiedenen Wegen zu bestimmen, bietet einen Bereich, in dem die Lernenden Erfahrungen mit empirischen und theoretischen Wahrscheinlichkeiten machen können. Unabdingbar dafür ist jedoch die Erfahrung des vorausgegangenen Stochastik-Kapitels in Klasse 7, in dem das Phänomen des Zufalls erlebt werden konnte.

Mit dem Spiel „Die beste Wahl gewinnt“ steht eine Situation zur Verfügung, in der nicht der fertige Wahrscheinlichkeitsbegriff, sondern das Phänomen von unterschiedlich bestimmbar Gewinncancen im Mittelpunkt steht.

Im Spiel wird mit Karten gespielt, auf denen unterschiedliche Ereignisse von verschiedenen Zufallsgeräten abgebildet sind. Diese Karten müssen so eingesetzt werden, dass die Chance, das abgebildete Ereignis anschließend zu würfeln, maximal wird. Zur Einschätzung werden u.a. Argumente zur Gleichwahrscheinlichkeit oder zur Größe der jeweiligen Flächen auf dem Zufallsgerät genutzt. Bei den Zufallsgeräten handelt es sich um einen Laplace-Würfel, teil-symmetrische Geräte wie die Riemer-Würfel oder Legosteine und einem Zufallsgerät, bei dem die Gewinnchance nur über Versuchsreihen eingeschätzt werden kann. Bei diesem letzten Gerät ist es insbesondere sehr wichtig, dass die Lernenden wissen, dass der Zufall erst auf lange Sicht Muster zeigt. Sonst wird es möglicherweise zu Einschätzungen kommen, dass ein Gerät mit z.B. zwei Ausgängen eine Chancenverteilung von 50:50 besitzt.

Eine erste Einschätzung der Gewinnchancen, die für das Spiel auch vollständig ausreicht, basiert in der Regel auf einer ordinalen Sortierung der Elementarereignisse. Dieser ordinale Zugriff wird im Folgenden für alle Zufallsgeräte quantifiziert. Dabei wird die Unterscheidung von Zufallsgeräten getroffen, bei denen die Gewinnchancen (das ist die Bezeichnung in der Spielsituation) bzw. die Wahrscheinlichkeit durch praktisches Probieren und durch theoretisches Überlegen erschlossen werden können.

Exakter quantifiziert werden diese Überlegungen durch die Verwendung der Laplace-Regel, die immer dann genutzt werden kann, wenn die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind. Im Sinne einer sprachlichen Entlastung für die Lernenden wird die Vokabel Elementarereignis nicht explizit eingeführt, sondern es wird immer von Ereignissen gesprochen.

Das Kapitel schließt mit der Thematisierung von zweistufigen Laplace-Zufallsversuchen. An einfachen Beispielen wird die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten als Rechenoperation für Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsversuchen einerseits an Rechtecken (anschließend an das Kapitel zur Multiplikation von Brüchen) und andererseits mit Hilfe von Bäumen visualisiert.

Etappe A: Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Die Aktivierung von Alltagserfahrungen zur Thematik beginnt auf der Einstiegsseite mit der Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Zufallsgeräte. Ausgehend von einer typischen Spielsituation wird zum einen thematisiert, ob die Zahlen auf einem normalen Würfel tatsächlich gleich wahrscheinlich sind („Die 1 kommt viel seltener als die anderen Zahlen“ oder „Die 6 kann ich einfach nicht gut werfen“). Zum anderen werden teil-symmetrische und nicht-symmetrische Zufallsgeräte thematisiert. Hier kann schon diskutiert werden, was Gewinnchancen überhaupt sind und wie man sie bestimmen kann.

Im Spiel „Die beste Wahl gewinnt“ (**E1**) wird die Wahl von geeigneten Ereignissen von verschiedenen Zufallsgeräten fokussiert. Geeignet ist ein Ereignis dann, wenn es eine große Gewinnchance hat. Anschließend wird das Zufallsgerät geworfen und wenn das Ereignis fällt, darf man weiter spielen. Das Spiel soll Motivation schaffen, sich mit den einzelnen Zufallsgeräten genauer auseinander zu setzen und die Gewinnchancen der einzelnen Ereignisse möglichst genau zu bestimmen. Dabei sind sowohl Alltagserfahrungen nützlich (z.B. die Chance mit einem Würfel eine bestimmte Zahl zu werfen, ist $1/6$) wie auch die Erfahrungen aus dem vorangegangenen Stochastikkapitel (z.B. auf lange Sicht kann man sicherer wetten). Im Anschluss an die Spielsituation (**E2**) werden diese Erfahrungen und die Spielerfahrungen aufgegriffen, um die Zufallsgeräte und deren Ereignisse nach der Größe der Gewinnchance zu sortieren. Das Plakat, auf dem die Ergebnisse notiert sind, kann im weiteren Verlauf des Unterrichts genutzt werden, um die hier getroffenen Einschätzungen zu bestätigen oder zu revidieren. In **E2** wird auch der Schritt von einer ordinalen Sortierung hin zu einer Maßzahl vollzogen, mit der die Gewinnchance angegeben werden kann. An dieser Stelle bietet sich auch der Wechsel zu **O1** an, wo der Begriff der Wahrscheinlichkeit eingeführt wird.

Das Ziel, eine möglichst exakte Maßzahl zu bestimmen, ist dann auch das Thema der folgenden Aufgaben (**E3-E7**). Dabei ist **E3** eine offene Version der Aufgaben **E4-E6**. Starke Lerngruppen kommen allein mit **E3** aus, schwächere Lerngruppen können **E3** auslassen. In beiden Wegen ist die Unterscheidung von (1) Gewinnchancen, die man durch praktisches Probieren und (2) Gewinnchancen, die man durch theoretisches Überlegen bestimmt, erkenntnisleitend. Im Unterschied zu **E3**, wo die Lernenden selbst entscheiden müssen, wie sie für jedes Zufallsgerät vorgehen, ist die Art der verwendeten Wahrscheinlichkeiten mit den zugehörigen Zufallsgeräten strukturgebend für **E4-E6**. Mit **E7** werden die Ergebnisse genutzt, um die Plakate neu zu strukturieren und dann in **E8** mit diesen erneut zu spielen. Hier muss natürlich deutlich werden, dass die Spielsituation eine andere ist, als wenn lange Versuchsreihen durchgeführt oder theoretische Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Die Dis-

krepanz zwischen den Wahrscheinlichkeiten und den tatsächlichen Ergebnissen wird in verschiedenen Vertiefenaufgaben noch mal aufgegriffen und explizit thematisiert.

In den zugehörigen Ordnenaufgaben werden die in der Spielsituation erkundeten Wege, Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, gesichert. Dabei ist der strukturelle Aufbau genau wie der in den Erkundenaufgaben. Erst wird praktisch (prozentuale Häufigkeit in **O2**), dann theoretisch bestimmt (Laplace-Regel in **O3**) und im letzten Schritt geht es um Vergleiche und Mischformen der beiden Zugangsweisen (**O4**).

Im letzten Teil des Kapitels werden die gewonnenen Erkenntnisse für zwei-stufige Zufallsversuche genutzt, wobei die Überlegungen auf theoretischen Wahrscheinlichkeiten beschränkt bleiben. In **E9** wird das Spiel für zweistufige Vorgehen modifiziert und in **O5** werden zweistufige Laplace-Versuche mit Hilfe von Bäumen und Rechteckbildern modelliert. Je nach Vorgaben des jeweiligen Lehrplans kann dieser Teil des Kapitels ausgelassen werden. Wird er bearbeitet, so ist es wichtig, dass alle Schülerinnen und Schüler beide Darstellungen kennenlernen. Die Darstellung am Rechteck macht die Rechenoperation der Multiplikation plausibel, der Baum hilft, das jeweilige Zufallsexperiment angemessen zu strukturieren.

Basisweg

Das Kapitel ist auf zwei Wochen angelegt und hat daher nicht viel Kürzungspotential. Je nach Stärke der Lerngruppe kann man alternativ **E3** zu **E4-E6** nutzen. Je nach Lehrplan **E9** und **O5** auslassen. Von den Vertiefenaufgaben können die Aufgaben möglicherweise ausgelassen werden. Eine alternative Basisversion gibt es zu den Aufgaben **V3**, **V9**, **V11**. Wer noch mehr Zeit sparen will, wird vielleicht direkt mit dem Spiel statt mit der Einstiegsseite beginnen.

Diagnose

Die Grundidee des Kapitels ist, die Lernenden bei ihren ordinalen Wahrscheinlichkeitsintuitionen („größere Fläche, mehr Chancen“) abzuholen und die Alltagserfahrungen und Erkenntnisse aus dem vorangegangenen Stochastikkapitel fruchtbar zu machen. Daher lohnt es sich, genau hinzuschauen, was die Lernenden mitbringen oder im Laufe des Spiels entwickeln. Gleichzeitig ist die Stochastik auch bekannt als dasjenige Themengebiet, in dem Fehlvorstellungen einiges verstellen können (z.B. „wenn ich zwei Ereignisse habe, sind die auch gleichwahrscheinlich“ oder „was ich einmal ausgerechnet habe, muss ich immer exakt stimmen“). Diese, aus den Alltagserfahrungen mitgebrachten Vorstellungen, sollten gezielt reflektiert und widerlegt werden.

Der besondere Fokus des Kapitels liegt auf der Unterscheidung zwischen dem theoretischen und empirisch gestützten Wahrscheinlichkeitsbegriff und baut auf einer tragfähigen Einschätzung des Zufalls auf kurze und lange Sicht auf. Daher sind folgende Diagnoseanlässe besonders wichtig:

E2, E3: Welche Lernenden entwickeln selbständig Einschätzungen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten (die Wahrscheinlichkeit für die Heftzwecke muss durch Versuchsreihen bestimmt werden, die Wahrscheinlichkeiten für gegenüberliegende Seiten auf dem Quader müssen gleich groß sein)? Inwiefern stellen sie selbständig den Bezug zur Gleichwahrscheinlichkeit von Ereignissen her?

E4: Welche Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Versuchsreihen hinreichend lang sein müssen?

E6: Inwiefern stellen sie selbständig den Bezug zur Gleichwahrscheinlichkeit von Ereignissen her?

O3: Wer kann zwischen möglichen und allen Ereignissen unterscheiden?

Literatur

Der Artikel beleuchtet Hintergründe eines vergleichbaren Einstiegs:

Hußmann, Stephan (2002): Einstieg in die Stochastik - mit CUBUS-Spiel und Galton-Brett. In: *Mathematik lehren* 115, 18-122.

Hier wird ein Teil der verwendeten Würfel näher beschrieben und untersucht:

Riemer, Wolfgang (1991): *Stochastische Probleme aus elementarer Sicht Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*. Bd. 18. Mannheim, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag (digital hier zu finden: www.riemer-koeln.de).

Einstiegsseite Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- vergleichen symmetrische, teil-symmetrische und nicht-symmetrische Zufallsgeräte;
- werden für gleichwahrscheinliche Ereignisse sensibilisiert;
- aktivieren unterrichtliche und lebensweltliche Vorerfahrungen zur Quantifizierung von Gewinnchancen.

Bezug

Hier werden einerseits Alltagserfahrungen aktiviert, andererseits die Notwendigkeit geschaffen, sich mit Gewinnchancen näher auseinander zu setzen, was direkt zum Spiel in **E1** führt.

Vorbereitung/Material

Evtl. Zufallsgeräte, um Experimente zu den Aussagen der vier Freunde durchzuführen und Karten, um die Ergebnisse zu notieren.

Umsetzungsvorschlag (45 min inkl. erster Reflexion)

Gemeinsames Lesen der Einstiegsseite, insbesondere um die Arbeitsschritte zu strukturieren, den Vergleich von Zufallsgeräten zu thematisieren und wie man die Gewinnchancen jeweils bestimmen kann.	UG
---	----

Die Zufallsgeräte werden auf verschiedene Gruppen verteilt und näher untersucht.	GA
--	----

Auf Karten werden pro Zufallsgerät die Einschätzungen zu den Gewinnchancen notiert.	GA
---	----

Diskussion über den Vergleich von Gewinnchancen verschiedener guter Wetten und Differenzierung in sichere und unsichere Wetten	UG
--	----

Mögliche HA: Zur Festigung **V1, V2**

Intensivzugriff Umsetzungshinweise/Alternativen

Wichtig in dieser Phase ist die gemeinsame Auseinandersetzung und Sensibilisierung zu verschiedenen Arten von Zufallsgeräten. Bei dem üblichen Würfel wird die Einschätzung, dass Zahlen wie 1 und 6 eine kleinere Chance besitzen als die anderen Zahlen mit der Einschätzung, dass alle Zahlen die Gewinnchance $\frac{1}{6}$ besitzen, konfligiert.

Hier ist es wichtig, diese Einschätzungen zu thematisieren und als offene Frage für den weiteren Fortgang im Kapitel zu markieren. In **E6** oder in **O3** kann diese Frage wieder aufgenommen werden.

Kürzere Variante: Es ist auch möglich, die Einstiegsseite nur zur Sensibilisierung zu nutzen und keine Zufallsversuche durchzuführen. Man kann – falls die Diskussion zu der Frage nach der Sicherheit von Vorhersagen aufkommt – auch die Aufgaben **V1** und **V2** als Unterstützung nehmen. Damit könnte man auch an das vorangegangene Stochastikkapitel anschließen.

Lernwege

Die meisten Schülerinnen und Schüler interessieren sich für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten. Dabei kann es sein, dass sehr unterschiedliche – auch nicht tragfähige – Einschätzungen geäußert werden:

- Die 1 oder 6 ist weniger wahrscheinlich, weil man sie dringender braucht.
- Beim Stein sind es 6 Zahlen, also ist die Gewinnchance auch $\frac{1}{6}$.
- Die Gewinnchance hängt von der Art des Werfens ab.

Es lohnt sich, eine Verteilung in theoretische und empirisch gestützte Wege bzw. entsprechende Zufallsgeräte festzuhalten. Evtl. kann man auch schon Quantifizierungen fixieren. Diese Einschätzungen können an verschiedenen Stellen des Kapitels aufgenommen und modifiziert werden.



Pias und Tills Aussprüche können Anlass bieten, um über Gleichwahrscheinlichkeit zu sprechen.

Oles und Merves Aussagen können Anlass bieten, um die Zufallsgeräte genauer zu untersuchen.

Ziele des Kapitels aus Vorschauerspektive

In diesem Kapitel ...

- vergleichst du Gewinnchancen.
- bestimmst du Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Zufallsgeräte.
- lernst du Mathematik, die dir beim Spielen helfen kann.

Erkunden A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

E1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- aktivieren und sammeln Erfahrungen im Umgang mit Spielen und verschiedenen Zufallsgeräten;
- aktivieren Alltagsvokabular zum Umgang mit Zufall wie „(un-)wahrscheinlicher“, „größere (Gewinn-)Chance“, usw.;
- beginnen, den Zufallsgeräten Gewinnchancen zuzuordnen und sie gegeneinander abzuwägen.

E1 Bezug

Direkt weiter mit E2.

E1 Vorbereitung/Material

Spielmaterial für jede Spielgruppe: Spielbrett, verschiedene Zufallsgeräte, Karten, Spielfiguren

E1 Umsetzungsvorschlag (45 min)

Klären der Spielregeln durch Vorspielen; UG
Verteilung des Spielmaterials

Mehrmaliges Durchspielen GA

Ausfüllen des Protokollbogens und Herstellung des Bezugs zum Einstieg; UG
Vergleichen von Gewinnchancen mit Hilfe des Protokollbogens;
Explikation der Rolle des Zufalls

Mögliche HA: Eigene Einschätzungen zu den verschiedenen Gewinnchancen aufschreiben oder **V1, V2** als Ergänzung zur Einstiegsseite.

Intensivzugriff

E1 Umsetzungshinweise/Alternativen

Modifizierter Spielauftrag: In Anlehnung an die Einstiegsseite werden vor dem Spielen die Gewinnchancen den Zufallsgeräten und Ereignissen zugeordnet. Danach wird gespielt und mit diesen vorab formulierten Einschätzungen verglichen.

E1 Erwartungshorizont

Lernende machen sich hier auf einen längeren Erkenntnisweg, der nach E8 und O4 abgeschlossen sein wird: Abhängig von der Art der Zufallsgeräte lassen sich die Gewinnchancen/ Wahrscheinlichkeiten entweder theoretisch oder empirisch ermitteln. Mit diesen Wahrscheinlichkeiten lassen sich Voraussagen machen, die aber erst auf lange Sicht mit den tatsächlichen Ergebnissen ‚übereinstimmen‘. Die Einzelwürfe können immer wieder von diesen Voraussagen abweichen.

E1 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten entstehen, wenn Lernende

- sich beim Vergleich der Einschätzung der Gewinnchancen von subjektiven Erfahrungen leiten lassen: ‚die 1 ist schwieriger als die 5‘ oder ‚bei der Heftzwecke ist die Gewinnchance 50:50‘.

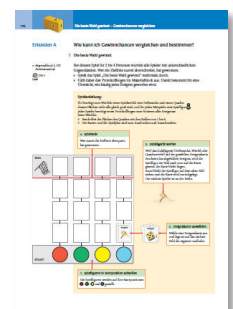
E1 Diagnose

- Welche Begriffe nutzen die Lernenden schon spontan (z.B. „Chance“ und „Wahrscheinlichkeit“)?
- Welche ersten Strategien verfolgen die Lernenden?
- Welche Vorerfahrungen mit Spielkontexten haben die Lernenden?
- Welche Vorstellungen aus dem vorangegangenen Stochastikkapitel können sie aktivieren?

E1 Differenzierung

Schülerinnen und Schüler, die die Zufallsgeräte und Wahrscheinlichkeitstypen sehr schnell differenzieren können, sollten aufgefordert werden, ihre Einschätzung noch nicht zu verraten, sondern empirisch zu überprüfen.

Mögliche Nachfragen: Gewinnt man mit der Heftzwecke immer besser als mit jeder Zahl auf dem Würfel?



Erkunden A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

E2/E3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- untersuchen die Zufallsgeräte systematisch;
- beschreiben Gewinnchancen mit Zahlen;
- ordnen die Gewinnchancen der angenommenen Größe nach und erklären ihre Ordnung (E2);
- sortieren die Zufallsgeräte nach empirischen und theoretischen Wahrscheinlichkeiten (E3);
- bestimmen durch Überlegungen oder Versuchsreihen die Gewinnchancen (E3).

E2/E3 Bezug

Systematische Untersuchung des Spiels aus E1, um Gewinnchancen zu quantifizieren. Nach E2 weiter mit O1, dann entweder E3 oder E4-E7, je nach Stärke der jeweiligen Lerngruppe. Nach E3 kann man noch mit E4-E7 weitermachen oder – falls E3 umfassend für alle Zufallsgeräte bearbeitet wurde – mit V3-V5.

E2/E3 Vorbereitung/Material

Leere Plakate und Karten zum Aufkleben (E2) (Folienvorlage im Onlinebereich)
Evtl. Beispieltabellen als Unterstützung für die Untersuchung der Zufallsgeräte (E3) (Tabellen im MB)
Auf Schülerseite: ausgefüllter Protokollbogen aus E1

E2/E3 Umsetzungsvorschlag (30 + 60 min)

2a)	Mit Hilfe des Protokollblatts Plakate mit Sortierung erstellen	GA
2b)	Museumsgang	UG
2c)	Wiederbearbeitung der eigenen Plakate	UG
2d)	Sammlung von verschiedenen Zahlen, gemeinsame Diskussion	GA/ UG
3a)	Zuordnung von Wegen zu bestimmten Zufallsgeräten, anschließend Vergleich	EA/ GA
3b)	Für mehrere Paare von Ereigniskarten: Bestimmung der Gewinnchancen Vorstellung der Ergebnisse auf den Plakaten	PAGA UG
3c)	Sortieren der Zufallsgeräte	UG

Mögliche HA nach E2: O1ab)

Mögliche HA zu E3:

(falls umfassend bearbeitet) O1abc) oder V3, V5
(falls noch nicht alle Zufallsgeräte untersucht) Aufgabenteile aus E2-E4

Intensivzugriff

E2/E3 Umsetzungshinweise

Variante: Notfalls muss man E2 im Klassenverband mit einem Plakat lösen. Besser ist jedoch, wenn jede Gruppe ihr eigenes Plakat hat, an dem sie in den nächsten Stunden weiter arbeiten können.

Da E3 oder E3-E6 leistungsdifferenziert angeboten werden können, ist es wichtig, die Gruppen in E2 schon so zusammenzusetzen, dass die einen E3 und die anderen E3-E6 in den jeweiligen Gruppen bearbeiten können.

E2/E3 Lernwege

Mögliche subjektive Strategien bei E3b):

- Ich kann alles nur mit Überlegen bearbeiten, dazu muss ich nur die Ereigniskarten pro Zufallsgeräte zählen und dann geht es wie beim Würfel.
- Ich kann alles nur durch Probieren lösen, weil die überlegten Gewinnchancen ja von den tatsächlichen abweichen können.

E2/E3 Erwartungshorizont

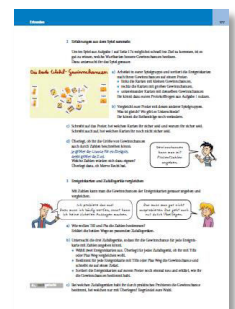
Während bei E2 eine ordinale Ordnung und das Wissen darüber, dass man Gewinnchancen als Prozentangabe oder Bruch angeben kann, Ziel ist, sollen bei E3 den Ereigniskarten quantifizierte Gewinnchancen zugeordnet werden. Darüber hinaus soll deutlich werden, dass Gewinnchancen auf Basis von Überlegungen und Gewinnchancen auf Basis von Versuchsreihen von der Beschaffenheit des jeweiligen Zufallsgeräts abhängen.

E2/E3 Differenzierung

Da E3 zwar durch die Leistungsstärkeren bearbeitet wird, kann es dennoch sein, dass sie hinsichtlich der Auswahl der beiden zu vergleichenden Ereigniskarten Hilfe brauchen wie auch hinsichtlich der Instrumente (Tabellen), um die Zufallsgeräte zu untersuchen. Hier kann man die entsprechenden Tabellen zu den Aufgaben E4-E6 nutzen.

Die Zusammenfassung in E3c) ermöglicht eine Verdichtung der Ergebnisse.

Gegebenenfalls muss der einen oder anderen Gruppe/ Schüler/ Schülerin, die mit E3 begonnen hat, empfohlen werden, zu E4-E6 zu wechseln.



Erkunden A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

E4/E5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- können mit Versuchsreihen die Gewinnchancen der Heftzwecke (als Beispiel für ein nicht-symmetrisches Zufallsgerät) und des Quaders (als Beispiel für ein teil-symmetrisches Zufallsgerät) bestimmen (**E4, E5**);
- erfahren, dass man bei hohen Wurfzahlen besser die Gewinnchancen vorhersagen kann (**E4, E5**);
- erfahren, dass man die Symmetrie eines Zufallsgeräts nutzen kann, um Gewinnchancen zu bestimmen (**E5**).

E4/E5 Bezug

Vertiefung oder Alternative von **E3** zur Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten, weiter mit **E6/E7**.

E4/E5 Vorbereitung/Material

Heftzwecke, Würfel und Quader für jede Gruppe, Protokollbogen aus **E1**, Wissenspeicher *Zufall 1*, Tabellen im Materialblock

E4 Umsetzungsvorschlag (20 min)

a) Werfen, Protokollbogen nutzen, Tabellen GA im MB ausfüllen

bc) Erklären, wann man eine sichere Gewinn-PA/ GA chance bestimmt hat. Gewinnchance für beide Ereignisse bestimmen.

Mögliche HA: **O2ab)** oder **V6, V7** oder **5ab)**

E5 Umsetzungsvorschlag (20 min)

a) Werfen, Protokollbogen nutzen, Tabellen GA im MB ausfüllen

bc) Erklären, wann man eine sichere Gewinn-PA/ GA chance bestimmt hat. Gewinnchance für beide Ereignisse bestimmen.

d) Angleichen der Gewinnchancen für ge- GA/ UG gegenüberliegende Seiten.

Mögliche HA: **6ab)** oder **V6, V7, V8**

Intensivzugriff

E4/E5 Umsetzungshinweise

Für **E4/E5** ist entweder neues Werfen der Zufallsgeräte oder Übertragen der Ergebnisse aus dem Protokollbogen notwendig. Damit hier nicht zu viel Zeit verloren geht, sollte dieser Prozess organisiert werden, entweder durch Aufteilen der Wurfarbeit oder durch gemeinsames Übertragen der Werte im Protokollbogen.

Die Bestimmung der Gewinnchancen kann in Partnerarbeit vorbereitet und dann in der Gruppe verglichen und diskutiert werden.

Die Erkenntnisse zu **E4c)** und **E5cd)** sollten einmal gemeinsam im Klassenverband besprochen werden.

E4/E5 Erwartungshorizont

Es bedarf einer hinreichend großen Wurfanzahl, um die Gewinnchancen einigermaßen sicher vorherzusagen. Die Anzahl kann man erkennen, wenn sich die prozentuale Häufigkeiten nur noch wenig ändern.

Gewinnchancen für nicht-symmetrische Zufallsgeräte lassen sich nur empirisch ermitteln und gegebenenfalls mit Argumenten zur Gestalt des Zufallsgeräts stützen (**E4**).

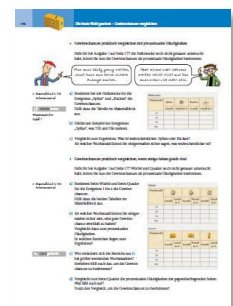
Die Gewinnchance für die Heftzwecke hängt von ihrer Gestalt ab. In der Regel liegt die Wahrscheinlichkeit für Rücken zwischen 35% und 45% (**E4**).

Gewinnchancen für teil-symmetrische Zufallsgeräte lassen sich empirisch ermitteln und mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen verbessern bzw. kontrollieren (**E5**).

E4/E5 Diagnose

- Inwiefern werden die prozentuale Häufigkeiten genutzt, um zu entscheiden, ob die Versuchsreihe ausreichend lang ist?
- Inwiefern wird die Symmetrie genutzt, um die Gewinnchancen zu kontrollieren (evtl. geschieht dies beim Quader, aber beim Würfel nicht)?
- Inwiefern kann zwischen empirischen und theoretischen Gewinnchancen unterschieden werden?

Mögliche Schwierigkeiten: Einigen Schülerinnen und Schülern fällt es schwer, anzuerkennen, dass die theoretische Gewinnchance von $\frac{1}{6}$ beim Würfel sich nicht in einer konkreten Versuchsreihe abbilden muss. Hier können die Aufgaben **V8** noch helfen.



Erkunden A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

E6/E7/E8/E9 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- begründen, bei welchen Zufallsgeräten es ausreicht, Gewinnchancen allein durch Überlegen zu bestimmen (E6);
- können Zufallsgeräte danach unterscheiden, wie man die Gewinnchancen bestimmt (E7);
- wenden die gelernten Erkenntnisse an und erleben, dass sie damit besser spielen können als zuvor (E8);
- erfahren im Spiel und mit Hilfe eines Rechteckbildes, dass man bei zweistufigen Zufallsversuchen die Wahrscheinlichkeiten multipliziert (E9).

E7/E9 Vorbereitung/Material

E7 Plakat aus den Aufgaben zuvor

E9 Spielmaterial: Würfel, evtl. Protokollbogen erstellen (lassen)

E6/E7/E8 Bezug

E6/E7/E8 nacheinander, weiter mit O4.

E9 Bezug

Weiter mit O5.

E6 Umsetzungsvorschlag (15 min)

- | | | |
|----|---|--------|
| a) | Vorgehen entwickeln | EA/ PA |
| b) | Gewinnchancen ermitteln und vergleichen | PA |
| c) | Hypothesen aufstellen, dann diskutieren | EA/ UG |

Mögliche HA: V9 oder Basisversion

E7 Umsetzungsvorschlag (10 min)

Plakat überarbeiten	GA
---------------------	----

E8 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|----|-----------------------|----|
| a) | Spielen | GA |
| b) | Zusammenhang erklären | UG |

Mögliche HA: V11-12

E9 Umsetzungsvorschlag (25 min)

- | | | |
|----|---|------------------|
| a) | Regelmäßigkeiten entdecken | EA |
| b) | Gemeinsam Oles Aussage verstehen, dann für andere Ereignisse Bilder malen, dann vergleichen | UG/
EA/
UG |
| c) | Gemeinsam formulieren, dann vergleichen | PA/
UG |

Mögliche HA: O5a) oder V24a)

Intensivzugriff

E6/E7/E8 Erwartungshorizont

Nachdem die Lernenden die Laplace-Formel für Elementarereignisse entwickelt haben, werden sie Diskrepanzen zu den Ergebnissen in den Versuchsreihen sehen. Hier ist wichtig, dass auf die Gründe explizit eingegangen wird. Im anschließenden Spiel wäre es gut, wenn die Spielentscheidungen auch mal mit den errechneten Gewinnchancen begründet werden oder aber sich explizit dagegen entschieden wird.

Bei E7 sollte man wieder in den bei E2 gebildeten Gruppen arbeiten.

E6 Differenzierung

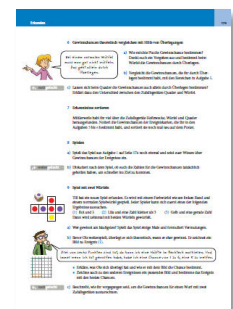
Stärkere Schülerinnen und Schüler können auch schon die Gewinnchancen für zusammengesetzte Ereignisse bestimmen, z.B. für gerade Zahlen oder Zahlen größer als 4.

E9 Erwartungshorizont

Die Ergebnisse aus a) mit dem Rechteckbild zusammen zu bringen, bedarf vermutlich eingehender Überlegungen. Hier sollten die Lernenden erst versuchen, eine eigene Erklärung zu finden. Dann sollte im Unterricht gemeinsam die Idee ausgeschärft werden, dass man hier nichts anderes macht als beim Multiplizieren von Brüchen. Dabei ist jedoch wichtig, dass das Ganze sich ändert (evtl. braucht man noch mal den Wissensspeicher Brüche 12).

E9 Diagnose

- Können Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ereignisse bestimmt werden?
- Inwiefern sind die Vorstellungen zur Multiplikation von Brüchen noch verfügbar, insbesondere kann die Verbindung einer Rechnung und dem entsprechenden Rechteckbild hergestellt werden?



Ordnen A

Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

O1/O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- nennen Beispiele für verschieden wahrscheinliche Ereignisse (O1);
- sichern die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (O1);
- ordnen Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit (O1);
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe prozentualer Häufigkeiten in hinreichend großen Versuchsreihen (O2).

O1/O2 Bezug

Systematisierung der Untersuchungsergebnisse aus E2 (O1) E3-E4 (O2), wird geübt in V1-V2 (O1), V3-V8 (O2).

O1/O2 Vorbereitung/Material

ggf. Wahrscheinlichkeitsstreifen aus O1b) auf Folie mitbringen
ggf. Wahrscheinlichkeitsstreifen aus Materialblock auf Folie mitbringen

O1 Umsetzungsvorschlag (15 min)

- | | | |
|-------|---|-------------|
| abcd) | Individuelle Verschriftlichung der Einschätzungen zu den Wahrscheinlichkeiten, Eintragen am Streifen danach Vergleich und Eintrag in WS | EA
UG/EA |
|-------|---|-------------|

Mögliche HA: O1d), V1, V2

O2 Umsetzungsvorschlag (15 min)

- | | | |
|----|---|-------|
| a) | Prozentuale Häufigkeiten bestimmen | PA/UG |
| b) | Streitgespräch: Ein Schüler nimmt Tills Position ein, der anderen versucht sie zu widerlegen. | PA |
| c) | Schriftliche Stellungnahme wichtig. | EA |
| d) | Vergleich der Lösungen zu c) | UG |

Mögliche HA: Eintrag in den Wissenspeicher oder V3, V5

Intensivzugriff

O1/O2 Umsetzungshinweise

O1ab) bzw. O2a) kann auch als vorbereitende Hausaufgabe bearbeitet werden.

Hintergrund zu O1c): Hier soll auch eine konkrete Zahl eingetragen werden, es muss aber keine Prozentzahl sein, es kann auch ein Bruch sein.

Man kann auch noch über weitere Ereignisse sprechen und diese eintragen lassen.

Hintergrund zu O2bc): In dem Streitgespräch kann man zum Thema machen, was ‚einigermaßen sicher kennt‘ eigentlich heißt und dazu die Daten von Ole und Till nehmen. Man kann dies alternativ auch im Klassenverband durchführen.

In c) kann man gut sehen, dass die prozentualen Häufigkeiten für 500 und für 1000 Versuche gar nicht mehr so unterschiedlich sind.

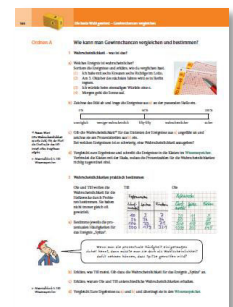
O1 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten: Bei O1a) ist die Gesamtanzahl an Möglichkeiten nicht bekannt. Entweder man gibt dies als Information (ungefähr 13 Millionen) oder man ist mit einer kleinen Zahl nahe Null zufrieden.

O1/O2 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher.

Zentrale Erkenntnis ist, dass die höhere Sicherheit bei einer großen Anzahl von Versuchen oder die Begründung, dass die prozentualen Häufigkeiten bei einer hohen Versuchsanzahl nur noch wenig schwankt.



Ordnen A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

O3 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- sichern ihre Erfahrung, dass man Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsversuchen, bei denen die Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, mit der Laplace-Regel bestimmen kann;
 - bestimmen Wahrscheinlichkeiten mit der Laplace-Regel;
 - identifizieren Zufallsversuche als Laplace-Versuche.

O3 Bezug

Systematisiert die Erfahrungen aus **E6**.
Weiter mit **E6** oder **V9-11**, **V19-23**.

O3 Vorbereitung/Material

ggf. Satz von Pia aus **a)** auf Folie mitbringen
ggf. verschiedene Zufallsgeräte mitbringen, um in **b)** alternativ zu diskutieren

O3 Umsetzungsvorschlag (45 min)

a)	Gemeinsam den Satz von Pia lesen und den Sinngehalt erschließen Schreibgespräch zu den Fragen	UG/ GA
b)	Wahrscheinlichkeiten bestimmen, begründen und vergleichen	EA (UG)
c)	Schreibgespräch	GA
d)	Einzelnen überlegen	EA
e)	Vergleich der Lösungen zu d) Eintrag in den Wissenspeicher	UG/ EA
f)	Als Hausaufgabe	EA

Mögliche HA: **V9-11**, **V19**, **V21**

Intensivzugriff

O3 Umsetzungshinweise

Zentral für diese Aufgabe ist die gemeinsame Erschließung der Aussage von Pia. Zum einen sollte klar werden, warum 100% eine feste Größe ist und zum anderen, was es bedeutet, diese gleichmäßig zu verteilen. Diese Vorstellung schließt an das umgekehrt proportionale Denken an. Das Schreibgespräch dient daran anschließend dem individuellen Verständnis dieser zentralen Aussage. Es bietet sich an, in **a)** die drei Fragen zu nummerieren und im Schreibgespräch zu beantworten, um dann gemeinsam in der Gruppe die korrekten Antworten auszuhandeln.

O3 Lernwege

Die meisten Lernenden können durch die enge Führung ihre Einsichten sichern.

Mögliche Schwierigkeiten:

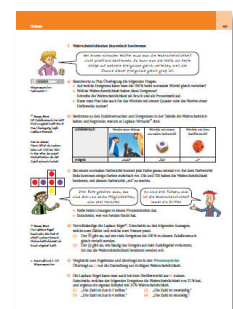
- **a)** Verständnis davon, wie man 100% auf Ereignisse gleich verteilt. Dies muss gegebenenfalls an einigen Beispielen im Anschluss an das Schreibgespräch weiter ausgeführt werden.
- Aufgabe **c)** wirft die Frage nach der Unterscheidung zwischen Elementarereignissen/ Ergebnissen und Ereignissen auf. Im Sinne der sprachlichen Entlastung wird in diesem Kapitel nur die Vokabel Ereignis genutzt, es macht hier aber sicher Sinn, über verschiedene Typen von Ereignissen zu sprechen.

O3 Diagnose

- Inwiefern werden die 100% als Ausgangsgröße richtig verstanden?
- Wie wird Gleichwahrscheinlichkeit identifiziert und abgegrenzt?

O3 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllten Wissenspeicher.



Ordnen A Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

O4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- vertiefen ihre Erfahrung, dass man Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsversuchen, bei denen die Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, mit der Laplace-Regel und bei Zufallsversuchen, bei denen die Ereignisse nicht gleichwahrscheinlich sind, durch praktische Zufallsversuche bestimmen kann;
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten für einzelne Ereignisse bei teil-symmetrischen Zufallsgeräten mit Hilfe von theoretischen Überlegungen.

O4 Bezug

Systematisiert die Erfahrungen aus **E6c)**, **E7**, weiter mit **E8** oder **V13-V18**.

O4 Vorbereitung/Material

ggf. Aussagen der vier Freunde auf Folie mitbringen
ggf. Karten, um die Wege in **ab)** aufzuschreiben

O4 Umsetzungsvorschlag (25 min)

Gemeinsam die Aussagen der vier Freunde lesen und Arbeitsauftrag klären

ab)	Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Wege beschreiben und vergleichen	PA/ UG
c)	Eintrag in den Wissenspeicher	EA
d)	Als Hausaufgabe	EA

Mögliche HA: **V13, V15**

Intensivzugriff

O4 Umsetzungshinweise

Als wesentliche Erkenntnis sollte erschlossen werden, dass man bei teil-symmetrischen Zufallsgeräten die Wahrscheinlichkeiten für korrespondierende Ereignisse identisch wählen sollte. Dazu helfen entweder die Versuchsreihen für alle korrespondierenden Ereignisse oder man bestimmt nur für eines der Ereignisse die prozentuale Häufigkeit. Wenn man die Wege auf Karten schreiben lässt, kann man im Unterrichtsgespräch Karten mit ähnlichem Vorgehen sortieren und die Verständnisschwierigkeiten aufgreifen und gemeinsam die Beschreibungen auf den Karten verbessern.

O4 Lernwege

Die meisten Lernenden haben hier wenige Probleme.

Mögliche Schwierigkeiten: **b)** Die Wahl der richtigen prozentualen Häufigkeit, falls für mehrere Ereignisse Wahrscheinlichkeiten vorliegen. So wird in dieser Aufgabe ja nicht die Versuchsanzahl angegeben. Unterstützend kann **V5** noch einmal hinzugenommen werden.

O4 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllten Wissenspeicher.

O4 Diagnose

- Inwiefern werden die 100% als Orientierungsgröße für die Summe aller Wahrscheinlichkeiten genutzt?
- Zu **d)**: Welche Ereignisse werden als korrespondierend identifiziert?



Ordnen A

Wie kann ich Gewinnchancen vergleichen und bestimmen?

Schnellzugriff

O5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- vertiefen ihre Erfahrung, dass man Wahrscheinlichkeiten bei gleichwahrscheinlichen Ereignissen mit der Laplace-Formel bestimmen kann;
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsversuchen durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten;
- stellen zweistufige Zufallsversuche mit Rechteckbildern bzw. mit Bäumen dar.

O5 Bezug

Systematisiert die Erfahrungen aus E9, weiter mit V24-26.

O5 Vorbereitung/Material

ggf. Bäume und Rechteckbilder aus ab) auf Folie mitbringen

O5 Umsetzungsvorschlag (30 min)

- | | | |
|-----|---|------------------|
| a) | Gemeinsam den Satz von Ole lesen und den Sinngehalt erschließen
Schreibgespräch zu der Bedeutung der Aussage
Vergleich im Klassengespräch | UG/
GA/
UG |
| bc) | Schreibgespräch zur Erklärung und Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten, dann zu Merves Aussage eine zweite Runde | GA/ UG |
| d) | Einzel überlegen, dann im Klassenverband besprechen | EA/ UG |
| e) | Eintrag in den Wissenspeicher | EA |

Mögliche HA: V24abc)

Intensivzugriff

O2 Umsetzungshinweise

Alternative: In starken Gruppen, kann man die Teile a) und b) als Gruppenpuzzle gestalten. Und a) dann als Auftrag für die zweite Phase vergeben.

O3 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten: a) Verständnis von Oles Aussage, insbesondere dass die Formulierung ‚blau gedreht wurde‘ bedeutet, dass ‚blau‘ feststeht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ und dass davon $\frac{3}{6}$ genommen werden.

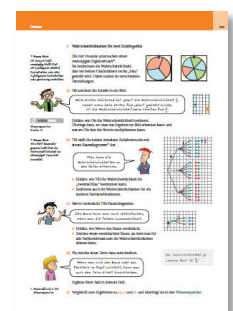
O3 Erwartungshorizont

Die Schülerinnen und Schüler sollen verstehen, dass man Wahrscheinlichkeiten in zweistufigen Zufallsversuchen mit einer Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten bestimmt. Anschaulich kann man das im Rechteck oder im Baum erklären.

Siehe auch ausgefüllter Wissenspeicher.

O3 Diagnose

- Inwiefern wird sich noch an die Multiplikation von Brüchen und deren Darstellung in Rechteckbildern erinnert?



Vertiefen 1 Wahrscheinlichkeiten einschätzen

Hintergrund	Die Aufgaben V1 und V2 dienen zur Aktivierung der Begriffe „wahrscheinlich(er)“, „unwahrscheinlich(er)“, „sicher vorhersagen“, „weniger wahrscheinlich“ u.a., dem Aufgreifen der lebensweltlichen Verständnisse von Wahrscheinlichkeit und der Vorbereitung des mathematischen Begriffs.
--------------------	--

V1 Ziel: Einordnen von Ereignissen nach ihren ungefähren Wahrscheinlichkeiten

Dauer	10 min
Bezug	Nach O1 oder die Aufgabe ergänzt die Einstiegsseite und die Spielsituation mit dem Gebrauch des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in alltäglichen Situationen.
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Aufgabe dient der Vorbereitung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und greift seinen alltäglichen Gebrauch auf. Die Lösungen sind z.T. subjektiv und geprägt von individuellen Vorkenntnisse (z.B. Würfeln der 6) oder äußeren Umständen (Fußball). Im Vordergrund steht die Begründung für die Einsortierung, nicht die normative Bewertung als richtig oder falsch. Die Extreme „unmöglich“ und „sicher“ sollten gemeinsam an Beispielen nachvollzogen werden. <i>Umsetzung:</i> Aufgabe ist als HA geeignet.
Lernwege	<i>Mögliche Irritation:</i> Die Wahrscheinlichkeiten wie die Vorhersage, dass der BVB Meister wird, hängt nicht von Sympathiebekundungen ab, sondern dafür müssen Kriterien angegeben werden. Je mehr Informationen man besitzt, desto sicherer kann man dies vorhersagen.

V2 Ziel: Eindenken in den Zusammenhang zwischen möglichen und allen Ereignissen

Dauer	10 min
Bezug	Nach Einstiegsseite, O1 und V1 .

Vertiefen 2 Wahrscheinlichkeiten praktisch bestimmen

Hintergrund	Die Erfahrungen, dass man bei einigen Zufallsgeräten Gewinnchancen bzw. Wahrscheinlichkeiten durch prozentuale Häufigkeiten in hinreichend langen Zufallsversuchen bestimmen kann, soll hier vertieft werden. Bei einigen Aufgaben sind die Versuchsreihen schon gegeben (V3 , V5), bei anderen müssen sie selbst erzeugt werden (V4). Ein Schwerpunkt gilt auch der Untersuchung, inwieweit Zufallsgeräte manipuliert werden (V6-V8). Damit wird ebenfalls die Rolle von theoretisch bestimmbar Wahrscheinlichkeiten angesprochen, die nicht als exaktes Abbild der prozentualen Häufigkeiten fungieren.
--------------------	---

V3 Ziel: Kumulatives Bestimmen von empirisch gestützten Wahrscheinlichkeiten

Dauer	10-15 min
Bezug	Nach E3 bzw. E4 , ggf. als Vorbereitung auf O2 als HA geeignet.
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Hier wird die Idee aus dem ersten Stochastikkapitel aufgegriffen, dass man Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe prozentualer Häufigkeiten durch Kumulation von kleineren Versuchsreihen bestimmen kann. Alternativ kann man auch die Mittelwerte der 7 Versuchsreihen bestimmen. Dann sieht man jedoch nicht die, sich entwickelnde Genauigkeit. <i>Differenzierung:</i> Starke oder schnelle Schülerinnen und Schüler können auch probieren, die Wahrscheinlichkeiten in anderer Reihenfolge kumulativ zu bestimmen und die Auswirkungen betrachten.
Lernwege	<i>Mögliche Irritationen:</i> Warum können die absoluten Häufigkeiten, insbesondere bei 1,3 oder 6 so unterschiedlich sein? Hier kann man darauf eingehen, dass der Zufall erst auf lange Sicht Muster zeigt, und an die Wetten auf die Tiere in dem ersten Stochastikkapitel verweisen.

V4 Ziel: Empirische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Dauer	10-15 min
Bezug	Nach E3 bzw. E4 , O2 .
Hinweise	<i>Mögliche Irritation:</i> Die Ergebnisse können abhängig vom Legestein und der Wurftechnik unterschiedlich sein.

V5 Ziel: Bestimmen von empirischen Wahrscheinlichkeiten bei unterschiedlichen Versuchsanzahlen

Dauer	15 min
Bezug	Nach O2 .
Hinweis	<i>Mögliche Irritationen:</i> Wie können die Ergebnisse von Ole und Till so unterschiedlich sein? Wieso kann man die absoluten Häufigkeiten addieren, durch 3 teilen und erhält die prozentualen Häufigkeiten?

V6/V7 Ziel: Prozentuale Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten nutzen

Dauer	10 min/ 5 min
Bezug	Nach E3 oder O2 .
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Neben der Rolle von prozentualen Häufigkeiten als potentielle Werte für Wahrscheinlichkeiten, wird hier diskutiert, wie sehr Häufigkeiten variieren dürfen, um Aussagen über die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten machen zu können. Dabei können in dieser Jahrgangsstufe natürlich keine konkreten Intervalle angegeben werden, aber es sollte diskutiert werden, dass die in der Aufgabe V6 gezeigte Abweichung von 250 noch kein Indiz für eine gezinkte Münze ist, jedoch die Ergebnisse in V7 auf eine Manipulation deuten, aber erst bei 3000 Würfeln. <i>Mögliche Irritationen:</i> Wieso ist das Wappen bei kleineren Wurfanzahlen häufiger, aber bei hohen Wurfzahlen nicht? Dazu soll V6d) eine Antwort liefern.
Lernwege	Manche Schülerinnen und Schüler sehen in V7 keinen Unterschied zwischen 30 und 3000 Würfeln. Hier sollte ein Blick auf die Tabelle in V6 geworfen und kleine und hohe Wurfanzahlen verglichen werden.

V8 Ziel: Wahrscheinlichkeiten sind nur Modelle

Dauer	10 min
Bezug	nach O2??
Hinweise	<i>Hintergrund:</i> Da viele Schüler/innen erwarten, dass die Wahrscheinlichkeiten sich exakt in den empirischen Daten wiederfinden, ist es wichtig, den Unterschied zwischen empirisch gewonnenen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu thematisieren.

Vertiefen 3 Wahrscheinlichkeiten theoretisch bestimmen

Hintergrund	Wahrscheinlichkeiten in Laplace-Versuchen bestimmen (V9, V10), Laplace-Zufallsgeräte (V11) und gleichwahrscheinliche Ereignisse (V10) identifizieren und Zufallsgeräte für gegebene Wahrscheinlichkeiten zu entwickeln (V9, V12), ist Schwerpunkt dieses Vertiefens.
--------------------	--

V9 Ziel: Übertragen der Kenntnisse zu Laplace-Versuchen auf Glücksrad

Dauer	10 min
Bezug	Nach O3 .
Hinweise	<i>Umsetzung:</i> Einfache Aufgabe, ist als HA geeignet.
Lernwege	<i>Mögliche Schwierigkeiten:</i> <ul style="list-style-type: none"> • Möglicherweise wird bei b) statt $\frac{3}{12}$ ein Glücksrad zu $\frac{1}{4}$ gezeichnet. Hier sollte zumindest inhaltlich begründet werden, warum dies das Gleiche ist. • Die Unterteilung des Glücksrades könnte in der rechten Version von b) Probleme bereiten.

V12 Ziel: Ausdenken von Zufallsgeräten

Dauer	10 min
Bezug	Nach O2 und V9 .
Lernwege	<i>Mögliche Schwierigkeiten:</i> Es wird nicht gesehen, dass die Zerlegung der Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des ggT der prozentualen Angaben zum Ziel führt, beim ersten sind das 10%, bei den anderen beiden jeweils 5%.

Vertiefen 4 Wahrscheinlichkeiten theoretisch oder praktisch bestimmen

Hintergrund	Bei allen Aufgaben geht es um das Zusammenspiel von praktischem Probieren und theoretischen Überlegungen. Während bei V13 , V15 und V16 der Zusammenhang zwischen den Flächengrößen und den Versuchsreihen im Mittelpunkt steht, wird in V14 noch einmal wiederholt, dass der Zufall erst bei langen Versuchsreihen Methode hat. In V17 geht es, als Vorgriff auf das nächste Vertiefen, schon um zusammengesetzte Ereignisse. Das Vertiefen schließt mit einer Aufgabe (V18), in der die Wahrscheinlichkeiten mit gewichteten Gewinnen verknüpft werden.
--------------------	---

V18 Ziel: Wahrscheinlichkeiten empirisch bestimmen, Zusammenhang Gewinn und Gewinnchance

Dauer

5-10 min

Bezug

Nach **O4**.

Hinweise

Umsetzung: Man kann bei **a)** nur allgemein die Gerechtigkeit der Punkteverteilung hinterfragen, man kann aber auch mit Hilfe der Werte aus **b)** die Gerechtigkeit quantifizieren und sich überlegen, welche Schweinposition den größten Gewinn verspricht.

Vertiefen 5 Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse, die mehrfach vorkommen

Hintergrund	Nachdem in die mögliche Fehlvorstellung, dass für die Laplace-Formel nur die Anzahl verschiedener Ereignisse maßgeblich ist und nicht die Anzahl aller gleichwahrscheinlichen Ereignisse, thematisiert wird (V19), werden in den Aufgaben V20-V23 verschiedene Zufallsexperimente bearbeitet, in denen es darum geht, Wahrscheinlichkeiten für zusammengesetzte Ereignisse zu bestimmen, zuzuordnen oder zu variieren.
--------------------	--

V19 Ziel: Gleichwahrscheinlichkeit bei zusammengesetzten Ereignissen

Dauer

15 min

Bezug

Nach **O3** oder **O4**.

Hinweise

Einordnung: Thematisierung der Gleichwahrscheinlichkeit von Elementarereignisse (auch wenn sie so nicht genannt werden) über fiktive Schüleräußerungen. Nach einer Auseinandersetzung kann in **c)** und **d)** überprüft werden, wie weit die Grundidee verstanden wurde.

Umsetzung: Man kann diese Aufgabe im Streitgespräch oder auch im Schreibgespräch bearbeiten lassen.

V22 Ziel: Wahrscheinlichkeiten beim Variieren von zusammengesetzten Ereignissen

Dauer

15 min

Bezug

Nach **V21**.

Hinweise

Mögliche Schwierigkeiten: Teil **b)** kann man durch systematisches Variieren der Bonbonanzahlen lösen. Für schwächere Schülerinnen und Schüler ggf. auslassen.

Vertiefen 6 Wahrscheinlichkeiten bei zwei Würfeln bestimmen

Hintergrund	Der Fokus liegt hier auf der Vertiefung der erarbeiteten Konzepte zu zweistufigen Zufallsversuchen. Während V24 die Rolle von Rechteckbild und Baum reflektiert, widmet sich V25 der Durchführung eines Zufallsexperiments zur Bestimmung von empirischen Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsversuchen. In V26 werden die Konzepte in einem anderen Kontext angewendet.
--------------------	--

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- führen mathematische Analysen und Experimente durch, um Spielstrategien zu fundieren.
- nutzen verschiedene Darstellungen, um Wahrscheinlichkeiten zu deuten und können auch Zusammenhänge mit Hilfe von Darstellungen erläutern.

In diesem Kapitel nutzen die Schülerinnen und Schüler tabellarische Darstellungen, Bäume, Rechteckbilder und Rechnungen, um Muster zu erkunden.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- führen kleinere Untersuchungen durch.
- stellen ihre Arbeitsergebnisse auf Plakaten dar.
- beurteilen Arbeitsergebnisse anderer.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Spielsituationen und Zufallsexperimente und präsentieren sich gegenseitig ihre Ergebnisse, die sie auch beurteilen müssen. Das geschieht zum Teil in Partnerarbeit, aber auch in der Klasse.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Schreiben und Sprechen: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende (dauerhaft) aktiv nutzen können: (zum Teil aus alten Kapiteln):

- diese Wette ist sicher/ unsicher, (un)wahrscheinlicher(er), unmöglich;
- je höher die Wurfzahl, desto...;
- blau hat eine höhere Gewinnchance als lila;
- ich gebe die Gewinnchance mit einer Prozentzahl an;
- der Anteil an/ von etwas;
- ich bestimme die prozentuale/absolute Häufigkeit für...;
- das Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit (von) 25%;
- die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{3}$, denn das passende Ereignis ist 1 von 3 Möglichkeiten;
- ich zähle, wie häufig die Zahl/ das Ereignis vorkommt;
- ich zähle die Anzahl der Felder/ aller Möglichkeiten.

Lesen und Zuhören: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende in ihrer Bedeutung erfassen, aber nicht unbedingt selbst nutzen können:

- sie bestimmen die Gewinnchancen praktisch/ durch theoretische Überlegungen;
- die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse sind bei einem Laplace-Versuch gleich;
- die Gewinnchancen nähern sich bei häufigem Würfeln jeweils an 50% an;
- sie fassen gleiche Ereignisse zusammen;
- die Werte schwanken in dem Bereich;
- sie stellen die beiden einzelnen Zufallsversuche mit einem Baumdiagramm dar;
- sie erkennen die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen.

Überprüfung

Als weitreichenden **zusätzlichen Leistungsnachweis** für eine Differenzierung nach oben bietet sich hier die selbstständige Untersuchung anderer Spiele/ Zufallsgeräte an. Diese kann vorgetragen oder schriftlich als kleine Facharbeit abgegeben werden. Mögliche Leitfragen:

- Wie funktioniert das Spiel?
- Wie werden die Wahrscheinlichkeiten bestimmt?
- Welche Wahrscheinlichkeiten können theoretisch oder praktisch vorausgesagt werden?
- Wie sicher sind diese Voraussagen?

Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen

Die Hinweise beziehen sich auf die Aufgaben im Schulbuch. Alternativ kann mit den zusätzlichen Trainingsaufgaben im Onlinebereich geübt werden.



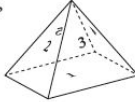
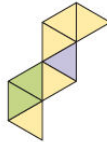
194



Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen

Checkliste

Die beste Wahl gewinnt – Gewinnchancen vergleichen

Ich kann ... Ich kenne ...	Hier kann ich üben ...
K1 Ich kenne alltägliche Ereignisse, die sehr unwahrscheinlich eintreten, und solche, die sehr wahrscheinlich eintreten. Nenne ein Ereignis, das sehr wahrscheinlich ist, und eines, das sehr unwahrscheinlich ist.	S. 184 Nr. 1
K2 Ich kann die Wahrscheinlichkeiten von Zufallsgeräten vergleichen, indem ich häufig genug werfe und so eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit praktisch bestimme. <ul style="list-style-type: none"> Welche sichtbare Zahl auf dem L-Körper hat vermutlich die größere Wahrscheinlichkeit? Erkläre, wie du das möglichst sicher herausfinden könntest. Warum reicht es nicht, den L-Körper nur fünfmal zu werfen, um die Wahrscheinlichkeit von 2 zu bestimmen? 	S. 184 Nr. 2 S. 185 Nr. 3, 4 S. 186 Nr. 6 S. 187 Nr. 11 S. 188 Nr. 14
K3 Ich kann bei Zufallsgeräten entscheiden, ob man mit ihnen einen Laplace-Versuch durchführen kann, und in solchen Fällen die Wahrscheinlichkeiten allein durch Überlegen bestimmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 3 zu werfen?	 S. 187 Nr. 9–11 S. 188 Nr. 13
K4 Ich kann bei Zufallsgeräten entscheiden, ob ich die Wahrscheinlichkeiten besser theoretisch durch Überlegen oder praktisch durch Probieren bestimme. Nenne jeweils zwei Zufallsgeräte, bei denen du die Wahrscheinlichkeit besser durch Überlegen bestimmst, und zwei Zufallsgeräte, bei denen du die Wahrscheinlichkeit besser durch Probieren bestimmst.	S. 187 Nr. 10 S. 188 Nr. 14, 16
K5 Bei Zufallsgeräten, bei denen einige Ereignisse gleichwahrscheinlich sind, kann ich die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse durch Überlegen verbessern. Erkläre, wie man vorgehen muss, um die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse 2, 3, 4 und 5 zu bestimmen.	 S. 187 Nr. 9, 11 S. 189 Nr. 17
K6 Ich kann bei Laplace-Versuchen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen, die mehrfach vorkommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Achter-Würfel gelb zu werfen?	 S. 190 Nr. 19, 20 S. 191 Nr. 21–23
K7 Bei Zufallsversuchen mit zwei Schritten kann ich Wahrscheinlichkeiten berechnen und mit einem Baumdiagramm darstellen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit einem Würfel zweimal hintereinander eine Sechs würfelt.	S. 192 Nr. 24, 25 S. 193 Nr. 26

► **Hinweis:** Im Materialblock auf Seite 108 findest du diese Checkliste für deine Selbsteinschätzung. Zusätzliche Übungsaufgaben findest du im Internet unter www.cornelsen.de/mathewerkstatt, Buchkennung: MWS040026, Mediacode: 194-1

Kompetenzen aus vorangegangenem Kapitel

Brüche vergleichen und addieren (Klasse 6):

K6 Ich kann Anteile als Bruch und als Prozentzahl darstellen.

Brüche multiplizieren (Klasse 6):

K6 Ich kann Brüche multiplizieren.

K7 Ich kann zu einer Multiplikation von Brüchen ein Bild zeichnen und eine Situation erfinden.

Zufall (Klasse 7):

K2 Ich kann die besten Gewinnchancen herausfinden.

K6 Wenn ich die Farbverteilung auf einem Würfel kenne, kann ich vorhersagen, wie häufig etwa jede Farbe bei einer großen Wurfanzahl auftauchen wird.

Basiskompetenzen, die in der Übe-Kartei für das spätere Vertiefen aufgegriffen werden:

K3 Ich kann bei Zufallsgeräten entscheiden, ob man mit ihnen einen Laplace-Versuch durchführen kann, und in solchen Fällen die Wahrscheinlichkeiten allein durch Überlegen bestimmen.

K6 Ich kann bei Laplace-Versuchen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen, die mehrfach vorkommen.

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**:
<http://www.ko-si-ma.de> → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 8,
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040026):
www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 8 oder mathewerkstatt 4.

	Gewinnchancen 1	Bild der Einstiegsseite (SB KOSIMA)
	Gewinnchancen 2	Arbeitsmaterial <i>Protokollbogen</i> (SB E1 MB)
	Gewinnchancen 3	Spiel <i>Die beste Wahl gewinnt</i> (SB E1 CORNELSEN, Mediencode 176-1)
	Gewinnchancen 4	Arbeitsmaterial <i>Werfen mit Heftzwecke, Würfel und Quader</i> (SB E4/E5 MB)
	Gewinnchancen 5	Wissensspeicher <i>Zufall 1</i> (SB E4 MB Kl. 7)
	Gewinnchancen 6	Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Zufall 1</i> (SB E4 KOSIMA)
		Gewinnchancen 7
Gewinnchancen 8		Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Zufall 3</i> (SB O1/O2 KOSIMA)
Gewinnchancen 9		Wissensspeicher <i>Funktionen 7</i> (SB O3 MB)
Gewinnchancen 10		Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Funktionen 7</i> (SB O3 KOSIMA)
Gewinnchancen 11		Wissensspeicher <i>Zufall 4</i> (SB O3/O4 MB)
Gewinnchancen 12		Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Zufall 4</i> (SB O3/O4 KOSIMA)
Gewinnchancen 13		Wissensspeicher <i>Brüche 12</i> (SB O5 MB Kl. 6)
Gewinnchancen 14		Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Brüche 12</i> (SB O5 KOSIMA)
Gewinnchancen 15		Wissensspeicher <i>Zufall 5</i> (SB O5 MB)
Gewinnchancen 16		Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Zufall 5</i> (SB O5 KOSIMA)
	Gewinnchancen 17	Basisaufgabe <i>U-Würfel</i> (SB V3 MB)
	Gewinnchancen 18	Basisaufgabe <i>Glücksräder</i> (SB V9 MB)
	Gewinnchancen 19	Basisaufgabe <i>Verschiedene Zufallsgeräte</i> (SB V11 MB)
	Gewinnchancen 20	Basisaufgabe <i>Tabellen und Zufallsgeräte zuordnen</i> (SB V13 MB)
	Gewinnchancen 21	Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 194-1)
	Gewinnchancen 22	Checkliste zum Ausfüllen (SB MB)