

Spielen, Wetten, Voraussagen – Den Zufall einschätzen



Didaktischer Hintergrund zum Kapitel.....	ab Seite 2
Einstieg	ab Seite 6
Erkunden	ab Seite 8
Ordnen	ab Seite 12
Vertiefen	ab Seite 14
Kompetenzen und Checkliste	ab Seite 20
Materialübersicht für dieses Kapitel.....	ab Seite 22

Herausgegeben von:

Timo Leuders
 Susanne Prediger
 Bärbel Barzel
 Stephan Hußmann

Autoren:

Stephan Hußmann
 Susanne Prediger
 Susanne Schnell

Redaktion:

Raja Herold

© 2014 Kosima-Projekt:

Zitierbar als Hußmann, Stephan, Prediger, Susanne & Schnell, Susanne (2014): Spielen, Wetten, Voraussagen – Den Zufall einschätzen. In: Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B. & Hußmann, S.(Hrsg.): Handreichungen zur Mathewerkstatt 7. Dortmund/Freiburg: Kosima. Online unter: www.ko-si-ma.de.

© 2014 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin:

Das Copyright gilt für alle dargestellten Seiten und Auszüge von Seiten des Schülerbuches und des Materialblocks der *mathewerkstatt*; Rechteinhaber und Bildquellen sind in den entsprechenden Bildnachweisen dieser Produkte ausgewiesen.

Titel **Spiele, Wetten, Voraussagen - Dem Zufall auf die Spur kommen**
Thema **Zufall**

Kontexte - Kernfragen – Kernideen

Zufällige Ereignisse sind auf kurze Sicht nicht voraussagbar, dennoch kann man auf lange Sicht Muster sehen. Diese Grundvoraussetzung stochastischer Überlegungen wird in diesem Kapitel erlebbar gemacht und reflektiert. Als Kontext für die Reflexion von Voraussagbarkeit dienen Wetten auf unterschiedliche Ereignisse und vor allem das Spiel „Wettkönig“, in dem auf Ereignisse mit unterschiedlichen Gewinnchancen gewettet werden muss. Unterschiedliche Gewinnchancen geben Aufschluss darüber, ob eine Wette *gut* ist oder nicht. Auf lange Sicht können gute Wetten sogar *sicher* sein. Um dies zu erleben, wird im Spiel die Wurfanzahl variiert. Für große Wurfanzahlen ist ein Computerspiel notwendig. In einer reflektierenden und systematischen Untersuchung des Spiels nähern sich die Lernenden eigenverantwortlich dem empirischen Gesetz der großen Zahl und in Etappe B einem prognostischen Wahrscheinlichkeitskonzept von der Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für relative Häufigkeiten.

Kernfrage A: Wie kann man möglichst sicher wetten?

Nach einer Spielphase, in der die Lernenden Erfahrungen zum Umgang mit Zufallsgeräten und der Entwicklung von Wettstrategien sammeln, folgt eine zweite Phase, in der sie die gemachten Erfahrungen reflektieren. Dabei zeigen sich die folgenden Kernideen handlungsleitend:

1. Die Wurfanzahl ist ausschlaggebend dafür, wie sicher man wetten kann.
2. Für hohe Wurfanzahlen kann man sicherer wetten, da die Ergebnisse nur noch wenig schwanken.

Dies erfahren die Lernenden mit einer systematischen Untersuchung von Spielprotokollen. Als Konsequenz werden Wettstrategien neu formuliert.

Kernfrage B: Welche Regelmäßigkeiten findet man beim Zufall?

In einer zweiten Spielphase wird auf konkrete Standorte (= relative Häufigkeiten) gewettet. Auch diese Erfahrungen werden mit Hilfe von systematischen Untersuchungen reflektiert und führen zu folgenden Kernideen:

1. Relative Häufigkeiten sind für Vorhersagen besser geeignet als absolute Häufigkeiten.
2. Zufallsschwankungen bekommt man in den Griff, indem man Bereiche und nicht einzelne absolute Werte voraussagt.
3. Bei großen Wurfanzahlen kann die relative Häufigkeit besser vorausgesagt werden.

Die Lernenden nutzen dazu grafische Darstellungen und numerische Strategien.

Kompetenzen

K1: Ich kann Alltagsbeispiele angeben für nicht sichere und sicherere Wetten.

K2: Ich kann die besten Gewinnchancen herausfinden.

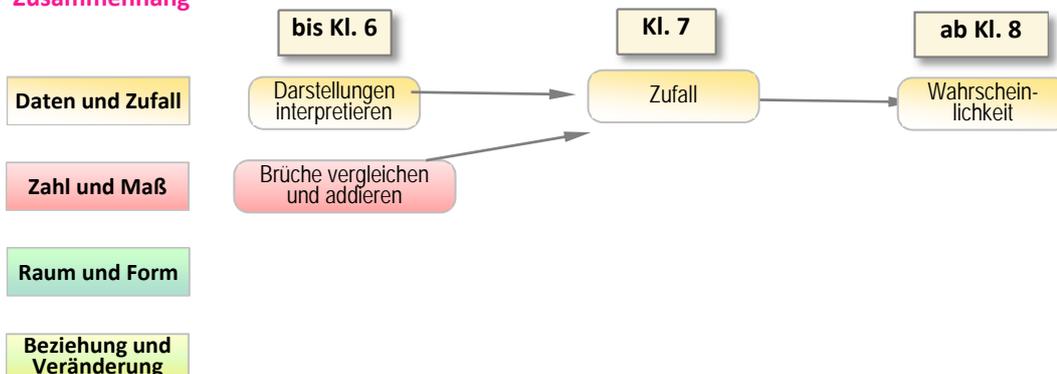
K3: Ich kann bei Spielen mit Würfeln, Münzen oder ähnlichem beurteilen, welche Wette sicherer ist.

K4: Ich kann absolute Häufigkeiten in relative umrechnen, um zu vergleichen.

K5: Ich kann erklären, warum ich bei großen Wurfzahlen besser wetten kann.

K6: Wenn ich die Farbverteilung auf einem Würfel kenne, kann ich vorhersagen, wie häufig etwa jede Farbe bei einer großen Wurfanzahl auftauchen wird.

Zusammenhang



Struktur

ca. 2 Wochen

Aktivierung von Vorstellungen zu unsicheren und sicheren Wetten, Erste Sensibilisierung für das Phänomen Zufall			45
A Wie kann man möglichst sicher wetten?			E O
		V1-V2 Welche Wetten sind sicherer?	
E1 Alltagserfahrungen im Spiel aktivieren, erste Erfahrungen mit dem Wettkönig sammeln			45
E2 Spiel untersuchen, um sicherer wetten zu können			45
E3 Sicherere Wetten für Spiele mit größerer Wurfanzahl	O1 Unterscheidung zwischen hohen und niedrigen Wurfanzahlen für sicheres Wetten	V3-V5 Wetten auf Sieg	15 30
B Welche Regelmäßigkeiten findet man beim Zufall?			E O
E4 Spielerfahrungen zum Wetten auf Standorte machen			35
E5 Standorte numerisch untersuchen		V6-V8 Absolute und relative Häufigkeiten angeben	20
E6 Standorte graphisch untersuchen			20
E7 Regelmäßigkeiten zum Wetten nutzen	O2 Schätzung relativer Häufigkeiten aus Farbverteilungen	V9-V17 Häufigkeiten voraussagen	25 30
		V18-V20 Entwicklungen von Häufigkeiten untersuchen	
		V21-V23 Den Zufall im Griff haben	

Kurzweg: ohne Einstieg, ohne dynamische Sicht auf das Gesetz der großen Zahlen (**V18-V20**)

Intensivzugriff

Hintergrund

Der Kontext, „Spielen, Wetten, Voraussagen“ bietet einen Bereich, in dem Kinder das Phänomen des Zufalls erleben können. Mit dem Spiel Wettkönig steht eine Situation zur Verfügung, in der nicht der fertige Wahrscheinlichkeitsbegriff, sondern das Phänomen Zufall mit seinen zentralen Tätigkeiten Voraussagen – Experimentieren – Reflektieren im Mittelpunkt steht.

Beim Wettkönig starten vier Tiere zu einem Rennen. Angetrieben werden die Tiere von einem zwanzigseitigen Farbwürfel mit ungleichmäßiger Farbverteilung: 7x rot, 5x gelb, 5x grün und 3x blau. Bei jedem Wurf rückt dasjenige Tier vor, dessen Farbe gewürfelt wurde. Die Spielerinnen und Spieler schließen Wetten auf die Tiere ab.



In der ersten Spielvariante „Wetten auf Sieg“ in Etappe A wetten die Spielenden darauf, welches Tier am weitesten kommt. Vor dem Start wird festgelegt, wie häufig insgesamt gewürfelt wird.

Natürlich ist die rote Ameise durch die ungleichmäßige Farbverteilung im Vorteil, daher ist die rote Ameise die beste Wette. Gleichwohl ist das Spiel für kleine Wurfanzahlen mit viel Glück verbunden, so dass auch die anderen Tiere gewinnen können. Daher ist die beste Wette für kleine Wurfanzahlen also trotzdem nicht sicher.

Für größere Wurfanzahlen dagegen schält sich die Ameise als recht sichere Wette heraus.

Exakter quantifiziert werden können die qualitativen Aussagen zur „nicht sicheren Wette“ und „recht sicheren Wette“ nicht im Rahmen des Kapitels. Für die Lehrkraft ist interessant zu wissen, dass bei Wurfanzahl 5 die Ameise mit 53% Wahrscheinlichkeit gewinnt, bei Wurfanzahl 200 mit 95%.

In der zweiten Spielvariante in Etappe B wird dann darauf gewettet, wie weit die Tiere kommen. Dies bereitet einen prognostischen Wahrscheinlichkeitsbegriff vor, in dem die Wahrscheinlichkeit als Schätzwert für relative Häufigkeiten bei großen Wurfanzahlen verwendet wird. In beiden Etappen spielen die Lernenden erst und untersuchen dann systematisch das Spiel. Diese aufeinander aufbauenden Tätigkeiten kennzeichnen die Struktur des Kapitels. Es ist wichtig, dass die beiden Tätigkeiten klar voneinander abgegrenzt werden. So können in der Spielphase Erfahrungen gesammelt und Vorerfahrungen akti-

viert werden und in der Untersuchungsphase das Spiel und damit das Phänomen Zufall untersucht werden, ohne von möglichen Gewinnabsichten (und mathematikfernen strategischen Erwägungen wie „ich setze anders als die anderen, sonst wird es nicht spannend“) beeinflusst zu werden. Dies ermöglicht eine Konzentration auf die auftretenden Muster.

In der Untersuchungsphase nutzen die Schülerinnen und Schüler vorstrukturierte Wettprotokolle und verbalisieren ihre Erkenntnisse in Form von Wettstrategien. Die explizite Formulierung und fortwährende Modifikation der Wettstrategien hat hierbei eine besondere Bedeutung. Die Alltagserfahrungen und Vorannahmen der Lernenden werden expliziert und dienen zugleich als Ausgangspunkt, um zu tragfähigen Einschätzungen von Situationen zu gelangen, in denen der Zufall eine Rolle spielt. In der ersten Spielphase wird jeweils ein Brettspiel verwendet, um den Umgang mit Zufallsspielen direkt zugänglich zu machen. Die Erfahrung, dass der Zufall auf lange Sicht Muster zeigt, lässt sich allerdings nur unter Verwendung eines Computers machen, denn dazu werden deutlich höhere Wurfanzahlen benötigt, als sie mit dem Brettspiel realisierbar sind.

Etappe A: Wie kann ich möglichst sicher wetten?

Die Aktivierung von Alltagserfahrungen zur Thematik beginnt auf der Einstiegsseite mit dem Wetten allgemein. Die Kinder sollen einschätzen, welche Wetten sicher oder unsicher sind. Spiele mit Zufallsgeräten tauchen dabei als eher unsichere Wetten auf.

Im Spiel Wettkönig wird das Wetten auf den zwanzigseitigen Farbwürfel fokussiert, der die Tiere antreibt. In einer ersten Phase wird mit dem Spielbrett ohne Vorgabe von Wurfanzahlen gespielt, um die Situation zu erfassen (E1). Wer richtig wettet, also voraussagen kann, welches Tier bei der zuvor festgelegten Wurfanzahl am weitesten voran kommt, bekommt einen Punkt. Wettkönig ist, wer am Schluss die meisten Punkte hat.

Um erfolgreich wetten zu können, müssen die Lernenden geeignete Wettstrategien entwickeln. Zunächst erscheinen sehr vielfältige individuelle Strategien, wie etwa die abgebildete, die sich dann mit zunehmender Reflexion einengen.

Ich habe beim Spiel immer den Würfel auf einer der Spitzen dreht drehen gedreht dann ist öfters hintereinander die gleiche Farbe heraus gekommen.

Die Weiterentwicklung der Wettstrategien und die Suche nach Wurfanzahlen für sichere Wetten bilden den zentralen Anlass zur Untersuchung der Gewinnchancen und der beim Zufall auftretenden Muster. Die meisten Kinder entwickeln in der Regel schnell eine Vorstellung von der Reihenfolge der Tiere: Die rote Ameise gewinnt eher als die anderen (ordinaler Wahrscheinlichkeitsbegriff). Für die Unterscheidung zwischen großen und kleinen Wurfanzahlen ist dagegen mehr gezielte Anregung erforderlich.

Den Übergang zur systematischen Untersuchung der Situation vollziehen viele Kinder nicht automatisch. Dieser muss daher durch geeignete Stufung von Arbeitsaufträgen angeleitet werden (E2). Dazu werden erst die Wurfanzahlen variiert, um dann die Auswirkungen bei einer festen Wurfanzahl zu beobachten. Da die Effekte bei hohen Wurfanzahlen durch eigenhändiges Würfeln nur mühsam sichtbar werden, wird der Prozess in dieser Phase durch ein Computerspiel unterstützt.

Etappe B: Welche Regelmäßigkeiten findet man beim Zufall?

In der zweiten Spielphase wird das gefundene Muster bei hohen Wurfzahlen genauer ausdifferenziert. Im Spiel müssen dazu nun die genauen Standorte (= relativen Häufigkeiten) vorausgesagt werden (E4), was wiederum bei hohen Wurfanzahlen besser gelingt.

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten lassen sich in verschiedenen Darstellungen erkennen: Bei festen Wurfanzahlen schwanken die absoluten Häufigkeiten immer in denselben Bereichen (Untersuchung der Zahlen, E5), die Standortbilder sehen bei unterschiedlichen, hinreichend hohen Wurfanzahlen immer ähnlich aus (Untersuchung der Bilder des Computerspiels, E6), die absoluten Häufigkeiten lassen sich daher hochrechnen (E7). Die relativen Häufigkeiten pendeln sich bei hinreichend hohen Wurfanzahlen um feste Werte ein, die mit der Farbverteilung etwas zu tun haben (zum Beispiel rot bei 7/20).

Um die Mitten der Schwankungsbereiche als gegeben durch die relativen Häufigkeiten zu identifizieren, ist ein Rückgriff auf das Konzept der relativen Häufigkeiten aus dem Kapitel „Brüche vergleichen und addieren“ erforderlich (E6). Der Zusammenhang zu den hochgerechneten absoluten Häufigkeiten wird in O2 expliziert.

Eine fachliche Herausforderung liegt darin, dass die relativen Abweichungen bei hohen Wurfanzahlen zwar kleiner werden, die absoluten Abweichungen aber größer. In den Spielregeln wird dies dadurch aufgefangen, dass Wettpunkte durch den Vergleich zweier Schätzungen verteilt werden, nicht durch Wertung der absoluten Abweichung.

Kurzweg

Das Kapitel ist auf zwei Wochen angelegt und hat daher nicht viel Kürzungspotential. Die Erweiterung auf eine dynamische Sicht des Gesetzes der großen Zahlen („je höher die Wurfanzahl, desto geringer die Schwankungen“) wurde auf das Vertiefen in den Aufgaben V18-V20 verlegt und kann auch ausgelassen werden.

Wer noch mehr Zeit sparen will, wird vielleicht direkt mit dem Spiel statt mit dem Wettbüro auf der Einstiegsseite beginnen.

Diagnose

Da die Grundidee des Kapitels ist, die Lernenden bei ihren ordinalen Wahrscheinlichkeitsintuitionen abzuholen („mehr rote Farben auf dem Würfel, mehr Chancen“), lohnt es sich genau hinzuschauen, was die Lernenden mitbringen oder im Laufe des Spiels entwickeln. Gleichzeitig ist die Stochastik auch bekannt als dasjenige Themengebiet, in dem Fehlvorstellungen einiges verstellen können (z.B. „Zufall ist sowieso nicht vorhersagbar“ oder „was ich einmal ausgerechnet habe, muss immer exakt stimmen“). Diese aus den Alltagserfahrungen mitgebrachten Vorstellungen sollten gezielt reflektiert und widerlegt werden.

Der besondere Fokus des Kapitels liegt auf der Entwicklung einer tragfähigen Einschätzung des Zufalls auf kurze und lange Sicht, daher sind folgende Diagnoseanlässe besonders wichtig:

E2: Welche Lernenden entwickeln selbständig Einschätzungen zur Reihenfolge der Gewinnchancen (Ameise ist besser)? Inwiefern stellen sie selbständig den Bezug zur Farbverteilung des Würfels her? Wer variiert gezielt die Wurfanzahlen?

In Etappe B kommen auch rechnerische Herausforderungen hinzu, die den Rückgriff auf das Kapitel „Brüche vergleichen und addieren“ erfordern. Deshalb ist es wichtig, die Lernausgangslagen genau zu beobachten. Hierzu dient insbesondere die Aufgabe E6. Außerdem:

E4: Welche Schülerinnen und Schüler nutzen schon Strategien des Hochrechnens, um die Standorte vorherzusagen?

E5: Wer aktiviert selbständig das Konzept der relativen Häufigkeit?

E5, O2: Wie gut sind Balkendiagramme verfügbar, um die Standortbilder angemessen lesen zu können?

O2: Inwiefern kann zwischen absoluten und relativen Häufigkeiten übersetzt werden?

Literatur

Drei Artikel stellen die Lernwege der Lernenden in diesem Kapitel genauer dar:

Hußmann, Stephan & Prediger, Susanne (2009): Je größer die Wurfanzahl, desto sicherer die Wette - Mit dem Spiel Wettkönig den Zufall auf lange Sicht erkunden, In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 51(25), 24-29.

Ohmann, Bernd & Schnell, Susanne (2011): Wann kann ich sicher wetten? Ordnen in Schülerhand – am Beispiel Wahrscheinlichkeit. In: *Mathematik lehren* 164, 14-19.

Schnell, Susanne (2011): „Je höher die Zahlen, desto weniger Bewegung“ – Lernende erkunden das empirische Gesetz der großen Zahlen, In: *Praxis der Mathematik in der Schule* 53(39), 9-13.

Einstiegsseite **Wetten und Voraussagen – Welche Wetten sind sicher?**

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- suchen geeignete Wetten;
- werden für sichere und unsichere Wetten sensibilisiert;
- aktivieren ihre lebensweltlichen Vorerfahrungen zum Voraussagen („Wetten“) und zum Phänomen Zufall.

Bezug

Hier werden einerseits Alltagserfahrungen aktiviert, andererseits die Notwendigkeit geschaffen, sich mit Wetten näher auseinander zu setzen, was direkt zum Spiel in **E1** führt.

Vorbereitung/Material

Karten und Stifte, Befestigungsmaterial für die Karten
Evtl. kann man sich zuhause einige Wetten als Vorbereitung überlegen.

Umsetzungsvorschlag (45 min inkl. erster Reflexion)

Gemeinsames Lesen der Einstiegsseite, insbesondere um die Arbeitsschritte zu strukturieren, die Zulässigkeit von Wetten zu thematisieren und die Spielregeln zu klären.	UG
---	----

Jeder überlegt sich zwei gute Wetten	EA
--------------------------------------	----

Einigung auf vier gemeinsame Wetten und entsprechende Kriterien, Wetten werden auf Karten geschrieben	GA
---	----

Diskussion über gute Wetten und Differenzierung in sichere und unsichere Wetten	UG
---	----

HA: zur Festigung **V1, V2**

Intensivzugriff **Umsetzungshinweise/Alternativen**

Wichtig in dieser Phase ist die gemeinsame Auseinandersetzung und Sensibilisierung zu sicheren und unsicheren Wetten. Unsichere und sehr unsichere Wetten sind solche, die nicht so gut geeignet sind für ein Wettbüro, weil niemand darauf wetten bzw. niemand dagegen wetten würde. Bei den sicheren Wetten lässt sich nicht so viel Gewinn machen, bei den unsicheren Wetten ist der Gewinn vermutlich hoch, aber die Gewinnchance klein. Geeignete Wetten sind die, die irgendwo dazwischen liegen.

Wenn der Zufall im Spiel ist, ist die Einschätzung über die Sicherheit der Wetten besonders schwierig, daran soll im Erkunden dann weiter gearbeitet werden.

Geschlossener Variante: Es ist auch möglich, die Kategorien ‚sichere Wette‘, ‚unsichere Wette‘ und ‚irgendwo dazwischen‘ direkt vorzugeben.

Wenn man etwas gelenkter einsteigen möchte, kann man auch **V1** im Unterricht gemeinsam erarbeiten und dann **V2** als Hausaufgabe geben.

Lernwege

Die meisten Schülerinnen und Schüler interessieren sich sehr für die Formulierung von Wetten und der Klärung, was sichere und was unsichere Wetten sind.

Folgende Beispiele von Wetten stammen aus der Erprobung:

sicher:

- Unser Lehrer kann schneller schreiben als Nicola
- Emily ist schlauer als Leon
- Vincent kann nicht so schnell rennen wie Anja
- Philipp hat größere Füße als Joy
- Bahar kommt gleich wieder
- Hertha BSC wird nicht deutscher Meister
- Barcelona gewinnt gegen Stuttgart

irgendwo dazwischen:

- Morgen scheint die Sonne nicht
- im Lotto am Mittwoch kommt die 6 dran
- am Mittwoch ist keiner aus der Klasse krank
- 5 Lehrer der Schule sind am Mittwoch krank
- Schalke gewinnt 2:1 gegen Dortmund

unsicher:

- Ivana und Alex bleiben mehr als 3 Monate zusammen
- in Musik bekommen wir keine Hausaufgaben
- Joshuas Arbeit ist besser als Timos
- Derek kann eine Flasche Wasser schneller leer trinken als Robert
- Amélie kann schneller 5 Gläser Wasser trinken als ihr Bruder

Es lohnt sich, eine Verteilung in sichere und sichere Wetten festzuhalten. Diese Wetten können am Ende der Einheit (**V23**) noch mal aufgenommen werden, um zu diskutieren, bei welchen Wetten man nun besser entscheiden kann, welche sicherer sind.



So kann eine ausgefüllte Wettkarte aussehen.

Oles Ausspruch kann Anlass bieten, um sichere Wetten zu thematisieren.

Hieran kann man gut die Strukturierung der Arbeit erklären.

Ziele des Kapitels aus Vorschauerspektive

- In diesem Kapitel ...
- suchst du möglichst sichere Wetten.
 - untersuchst du die Regelmäßigkeiten des Zufalls.
 - lernst du Mathematik, die dir beim Wetten und Spielen helfen kann.

Erkunden A Wie kann ich möglichst sicher wetten?

Schnellzugriff

E1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- aktivieren und sammeln Erfahrungen im Umgang mit Spielen und dem Zufallsgerät Würfel;
- aktivieren Alltagsvokabular zum Umgang mit Zufall wie „(un-)sicher“, „(un-)möglich“, „(un-)wahrscheinlich“, „(Gewinn-)Chance“, usw.;
- beginnen, Wettstrategien zum Gewinnen auszuprobieren und gegeneinander abzuwägen.

E1 Bezug

direkt weiter mit E2

E1 Vorbereitung/Material

Spielmaterial für jede Spielgruppe: 4 Tiersteine, Wettsteine, Farbwürfel, Wurfzähler, Stopp-Schild

E1 Umsetzungsvorschlag (45 min)

1a) Klären der Spielregeln durch Vorspielen; UG
Verteilung des Spielmaterials

Mehrmaliges Durchspielen	GA
--------------------------	----

1b) Herstellung des Bezugs zum Einstieg; UG
Explizites Vergleichen von Wetten;
Explikation der Rolle des Zufalls

Mögliche HA: Eigene Erfahrungen aufschreiben oder **V1, V2** als Vertiefung der Einstiegsseite.

Intensivzugriff

E1 Umsetzungshinweise/Alternativen

Ohne Spielmaterial:

Sollte das Spielmaterial nicht zur Verfügung stehen, kann im Notfall auch die Würfelsimulation zum 20-seitigen Würfel genutzt werden (im Onlinebereich). Deutlich besser ist allerdings die Variante mit Spielmaterial, weil die Erfahrungen besser greifbar sind.

Modifizierter Spielauftrag:

Sucht euch eine Wurfanzahl zwischen 1 und 40 aus und wettet darauf, welches Tier gewinnen wird.

Spielt das Spiel ungefähr 10 Mal durch. Schreibt euch auf, auf welches Tier ihr jeweils wettet. Ihr wettet offen, so dass jeder weiß, was die anderen genommen haben.

E1 Erwartungshorizont

b) Lernende machen sich hier auf einen längeren Erkenntnisweg, der nach **E3** und **O1** abgeschlossen sein wird: Aufgrund der Farbverteilung auf dem Würfel ist die Ameise die beste Wette. Sicher ist sie aber nur bei hohen Wurfzahlen, aber die entsteht noch nicht hier.

c) Die Wetten im Spiel Wettkönig sind weniger sicher, weil

- man weniger über den Ausgang des Spiels weiß/ man das Spiel noch nicht kennt
 - alle Tiere mal gewinnen/ das Ergebnis immer anders ist
- Rolle des Zufalls:
- macht das Wetten unsicher/ nicht vorhersagbar
 - bestimmt das Würfelergebnis
 - man kann das Ergebnis nicht beeinflussen

7	Ameise
5	Frosch
6	Schnecke
3	Igel

E1 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten entstehen, wenn Lernende

- beim Vergleich der Wetten bei **1c)** nicht auf die Sicherheit fokussieren
- bei **1c)** an Grenzen bei der Verbalisierung stoßen. Eine Normierung der Sprache ist hier aber noch nicht notwendig, denn das Reflektieren über die Rolle des Zufalls wird hier erstmalig angestoßen.

E1 Diagnose

Welche Begriffe nutzen die Lernenden schon spontan (z.B. „Chance“ und „Wahrscheinlichkeit“)?

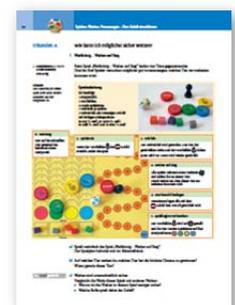
Welche ersten Strategien verfolgen die Lernenden?

Welche Vorerfahrungen mit Spiel- und Wettkontexten haben die Lernenden?

E1 Differenzierung

Schülerinnen und Schüler, die die Farbverteilung sehr schnell entdecken, sollten aufgefordert werden, ihre Strategie noch nicht zu verraten, sondern empirisch zu überprüfen.

Mögliche Nachfragen: Gewinnt man mit der Strategie immer? Kannst du deine Strategie noch verbessern?



Erkunden A Wie kann ich möglichst sicher wetten?

Schnellzugriff

E2/E3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- untersuchen das Spiel systematisch;
- finden Wettstrategien und überprüfen diese anhand der Computersimulation (E2);
- erkennen mit der Zusammenfassung die Wurfanzahl als ausschlaggebend dafür, wie sicher sie wetten können (E3).

E2/E3 Bezug

Systematische Untersuchung des Spiels aus E1, um gute Wettstrategie zu finden. Weiter mit O1, dann V3-V5.

E2/E3 Vorbereitung/Material

mehrere Materialblockseiten (Folienvorlage im Onlinebereich)
 Spielmaterial verteilen,
 Computer mit Computerspiel (im Onlinebereich):
 Idealerweise pro 2 Kinder ein Computer, Gruppenarbeit
 ist auch mit 4 Kindern pro Rechner möglich.

E2/E3 Umsetzungsvorschlag (45 + 15 min)

2a)	mehrmaliges Durchspielen; Protokollblatt im MB ausfüllen	GA
2b)	Wettstrategie formulieren, danach ohne Wertung sammeln	EA/UG
2c)	Arbeitsauftrag klären, Untersuchung am Computer, ggf. Strategie ändern	UG PA (GA)
3)	Zusammenfassung aus MB am Projektor gemeinsam ausfüllen	UG
	Frage nach sicherer Wurfanzahl zu zweit diskutieren	PA
	Sicheres Wetten bei Wurfanzahl 100 und 1000 thematisieren Klären, dass die Ameise aufgrund der Farbverteilung das schnellste Tier ist	UG

Mögliche HA: O1a), b) oder V43, V4, V5

Intensivzugriff

E2 Umsetzungshinweise

Variante: Notfalls muss ein Computer mit Beamer reichen, auf dem die Klasse auf Zuruf gemeinschaftlich experimentiert. In der Anmoderation zu 2b) Spiel- und Untersuchungsphase explizit abgrenzen. Ziel ist nun das argumentativ gestützte Finden einer Wettstrategie, nicht das Gewinnen oder Verlieren. Mathematisch nicht tragfähige Strategien wie Begründungen über die Lieblingsfarbe sollten nicht direkt durch den Lehrenden als falsch gewertet werden. Durch die Aufgaben sollten Lernende selbst zu einer Revision dieser Ideen kommen.

E2/E3 Erwartungshorizont

Immer ist die Ameise die beste Wette, denn rot taucht auf dem Würfel am häufigsten auf. Je höher die Wurfanzahl, desto sicherer ist die Wette, weil dann die anderen Tiere immer weniger Chancen zum Gewinnen haben.

E2/E3 Differenzierung

Bei Leistungsschwächeren gezielt den Blick auf das Untersuchen der Spiele mit Wurfanzahl 1 bzw. 10 im Vergleich zu 100 und 1000 lenken.

Wurfanzahl				
1	×	×	×	×
10	×	×	×	×
100	×	×	×	
1000	×			

Die Zusammenfassung in E3 ermöglicht eine Verdichtung.

E2/E3 Lernwege

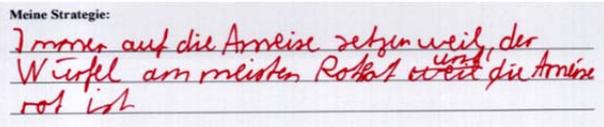
Mögliche subjektive Strategien bei 2b), zum Beispiel:

- Ich nehme das, was ein anderer / keiner genommen hat (soziale Strategie)
- Ich nehme Igel, weil es mein Lieblingstier ist (individuelle Bedeutsamkeit)

Mögliche tragfähige Strategien bei 2b):

- Ich nehme das Tier, das am meisten gewonnen hat (empirische Strategie)
- Ich nehme Ameise, weil sie mehr Felder auf dem Würfel hat (theoretische Strategie)

Beispiel für theoretische Strategie aus der Erprobung:



Mögliche nicht weiterführende Beobachtung in 2d):

- Ameise gewinnt immer dann, wenn ich auf Schnecke wette

Mögliche tragfähige Beobachtungen in 2d):

- Die Ameise gewinnt immer
- Die Ameise gewinnt immer bei Wurfanzahl 100 und 1000, bei 1 und 10 ist es immer anders.



Erkunden B Welche Regelmäßigkeiten finde ich beim Zufall?

Schnellzugriff

E4/E5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- machen erste Erfahrungen mit der Voraussage relativer Häufigkeiten (= Standorte) (E4);
- erfahren, dass man bei hohen Wurfzahlen besser die ungefähren Standorte vorhersagen kann (E4);
- lernen Standort-Bereiche als Beschreibungsmittel für schwankende Standorte kennen (E5).

E4/E5 Bezug

Weiterführung von E3 zur Quantifizierung von Wahrscheinlichkeitsaussagen, weiter mit E6/E7

E4 Vorbereitung/Material

Spielmaterial wie in E1 für jeweils 2er Gruppen, pro 2 Kinder ein Computer mit Computerspiel Wettprotokoll aus dem Materialblock

E4 Umsetzungsvorschlag (30-40 min)

- 4a) Spielregeln klären durch Vorspielen UG

- 4b) Spielen, Wettprotokoll im MB ausfüllen PA

- 4c) Wettstrategie formulieren und sammeln EA/UG

- 4d) Blitzabfrage: Jeder Schüler/jede Schülerin nennt ein Argument, an der Tafel sammeln, dann gemeinsam diskutieren UG

Mögliche HA: E4d), V14a-c

E5 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- 5a) Mehrmaliges Untersuchen PA

- 5b) Untersuchen und im Materialblock ausfüllen, Wettbereiche analysieren Mehrere Tabellen vergleichen UG

Bilder und Rechenwege an der Tafel gemeinsam diskutieren UG

Mögliche HA: V13, V16, ggf. Merves, Tills und Oles Beobachtungen ordentlich ins Heft schreiben

Intensivzugriff

E4 Umsetzungshinweise

Umsetzungshinweis:

Für E4 ist ein Partnerspiel notwendig, damit die Lernenden gegeneinander wetten können und so nicht die Standorte exakt vorhersagen müssen.

Variante: Falls zu wenige Computer zur Verfügung stehen, spielen die Schülerinnen und Schüler jeweils 2 gegen 2.

Hinweise in der Anmoderation zu 4a):

Unterschied zu E1 betonen: Es geht jetzt darum, für jedes Tier den Standort vorherzusagen.

E4 Erwartungshorizont

Es ist viel schwieriger, die Standorte vorherzusagen als den Sieg. Die Standorte lassen sich nur ungefähr schätzen. (spätere Einsicht in E5-E7: Dazu nutzt man die Farbverteilung auf dem Würfel: 7 von 20 Seiten sind rot, das lässt sich durch die besondere Wahl der Seitenanzahl auf 100 hochrechnen, so dass man die relative Häufigkeit von $7/20 = 35\%$ als Schätzwert nutzen kann für die Wahrscheinlichkeit.)

Mögliche Antworten zu 4d):

- Weil man dann die Standorte besser vorhersagen kann.
- Weil bei hohen Zahlen die Ameise immer gewinnt.
- Weil es bei kleinen Zahlen immer verschieden ist und alle Tiere mal gewinnen können.

E4 Diagnose

Inwiefern wird die Reihenfolge der Farben aus E1 bis E2 beim

Wetten auf Standorte angewendet? Inwiefern wird die Wurfanzahl als Summe der geschätzten Standorte beachtet?

Welche Schülerinnen und Schüler nutzen schon Strategien des Hochrechnens, um die Standorte vorherzusagen?

E4 Lernwege

Beispiele für Wettstrategien zu 3c):

- Immer die Zahl vom Gegner nehmen
- Wenn die Wurfanzahl 200 ist, dann ist die Ameise ungefähr bei 70, Frosch bei 50 usw.
- Ameise am meisten, dann Schnecke und Frosch, dann Igel

Mögliche Schwierigkeiten:

Einige Schülerinnen und Schüler...

- übertragen Ideen aus dem Spiel „Wetten auf Sieg“ erst nach Aufforderung
- erkennen nicht sofort Möglichkeiten zum Schätzen der Standorte, diese werden dann in E5-E7 weiter angeleitet.

E5 Erwartungshorizont

a) Die Ergebnisse liegen in bestimmten Bereichen.

b) Wenn man mehrfach 200-mal wirft, liegt der Frosch meist in einem Bereich um 50 Würfe, z.B. 30-70.



Erkunden B Welche Regelmäßigkeiten finde ich beim Zufall?

Schnellzugriff

E6/E7 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- finden Regelmäßigkeiten anhand numerischer und grafischer Betrachtungen der Standorte (E6/E7);
- nutzen relative Häufigkeiten für Vorhersagen (E6);
- bringen die Farbverteilung in Verbindung mit den Standorten (=relativen Häufigkeiten) (E6);
- wenden die gelernten Erkenntnisse an und erleben, dass sie damit besser wetten können als zuvor (E7).

E6/E7 Vorbereitung/Material

Computer mit installierter Software

E6 Ausgefüllter Wissensspeicher rel. Häufigkeit aus Kapitel „Brüche vergleichen und addieren“ (Kl. 6)

E7 Spielmaterial: Würfel oder Computer

E6/E7 Bezug: E6/E7 nacheinander, dann weiter mit O2

E6 Umsetzungsvorschlag (20 min)

6a) Mehrmaliges Spielen und Untersuchen PA

6b) Wissensspeicherseiten mit Ronjas Aussagen vergleichen EA/PA

6c) Säulendiagramme und numerische Zusammenhänge untersuchen
Beobachtungen im Heft notieren EA/PA

6d) Mit Computer experimentieren PA

6e) Häufigkeiten unterscheiden und Begründen EA

Stabilisation der relativen Häufigkeiten bei hoher Wurfanzahl herausarbeiten UG

Mögliche HA: V6, V16

E7 Umsetzungsvorschlag (20-30 min)

7a) Numerische Regelmäßigkeiten entdecken EA

7b) Zusammenhang erklären EA

7c) Abwechselnd wetten und spielen PA

7d) Rolle der Farbverteilung klären UG

Mögliche HA: E7d), V16, V17

Intensivzugriff

E6 Erwartungshorizont

In den Standortbildern des Computers werden relative Häufigkeiten (Anteile) gezeigt, und man sieht, dass diese immer ähnlich sind bei hohen Wurfzahlen. Deswegen lohnt auch bei numerischer Darstellung die relative Betrachtung, denn die relativen Häufigkeiten zeigen Regelmäßigkeiten. Das kann man auch bei Streifen zum Papierkorbball sehen, genauso wie bei den relativen Häufigkeiten bei 100 und 200 Würfeln.

Zu e): Bei hohen Wurfanzahlen sind die relativen Häufigkeiten in Bildern und Tabellen immer ähnlich, also kann ich sie gut voraussagen.

E6 Differenzierung

Schwächere Schüler brauchen ggf. Aufarbeitungszeit für das Wiederholen der relativen Häufigkeit und deren Berechnung.

E7 Erwartungshorizont

Typische Antworten sind:

a) Bei hohen Wurfanzahlen sind die relativen Häufigkeiten immer ähnlich. Wenn man die absolute Häufigkeit für 200 Würfe kennt, kann man die für 2000 Würfe durch Multiplikation mit 10 bestimmen.

bc) Bei großen Wurfanzahlen kann man relative Häufigkeiten besonders gut voraussagen, weil man nicht hochrechnen braucht. Bei kleinen dagegen ist die Voraussage unsicher.

d) Rot ist 7 von 20 mal auf dem Würfel, und $7/20 = 35\%$ ist auch die relative Häufigkeit beim Werfen. (Math. Hintergrund: Wahrscheinlichkeit wird hier als Schätzwert für die relative Häufigkeit implizit eingeführt, auch wenn das Wort Wahrscheinlichkeit hier noch nicht benutzt wird).

E7 Differenzierung

7d) kann von stärkeren Schülern vorgezogen werden.



Ordnen A Wie kann man möglichst sicher wetten?

Schnellzugriff

O1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- halten ihre Erfahrungen zur Bedeutung hoher Wurfanzahlen fest;
- sichern die Unterscheidung zwischen hohen und niedrigen Wurfzahlen für sicheres Wetten durch Übertragung auf den Kontext ;
- reflektieren die Grenzen und Praktikabilität des Gesetzes der großen Zahlen.

O1 Bezug

Systematisierung der Untersuchungsergebnisse aus E2, wird geübt in V3-V5

O1 Umsetzungsvorschlag (30 min ohne 1e)

1ab)	Individuelle Verschriftlichung der Weterfahrungen, danach Vergleich	EA UG
1c)	Übertragung der Idee „je länger, desto sicherer“ auf Glücksrad diskutieren und verschriftlichen	PA
1d)	Vergleich der Lösungen zu c) Übertragung der zentralen Idee in WS	UG
1e)	Schriftliche Stellungnahme wichtig (als Hausaufgabe)	HA
	Vergleich der Lösungen zu e)	UG

Mögliche HA: O1e), V3, V4

Intensivzugriff

O1 Umsetzungshinweise

1ab) kann auch als Hausaufgabe bearbeitet werden.

Hintergrund zu 1c): Um Irritationen über mögliche Störbarkeit des Glücksrads zu umgehen, wurde ein automatisches Glücksrad gewählt. Hier kann weder die Drehstärke noch die Drehdauer verändert werden, das Ergebnis ist also tatsächlich zufällig.

1e): Kann um Schüleräußerungen der eigenen Klasse ergänzt werden. Bearbeitung z.B. im schriftlichen Ich-Du-Wir Beispiel aus der Erprobung:

Je größer die Wurfanzahl, desto sicher kommt die Ameise

Ich	Ich und Du	Wir
Je größer die Wurfanzahl, desto wahrscheinlicher wird es, dass die Ameise drankommt.	Ist die Wurfanzahl 10, 100, o. 1000er, desto größer hat die Ameise die Chance zu gewinnen.	

O1 Erwartungshorizont

ab) siehe E2

c) siehe ausgefüllter Wissensspeicher (hier von einer Schülerin)

Die Farbe Grün hat die höchste Gewinnchance, weil ...
Grün am meisten vorkommt.

So hängt die Sicherheit der Wette von der Anzahl der Drehungen ab

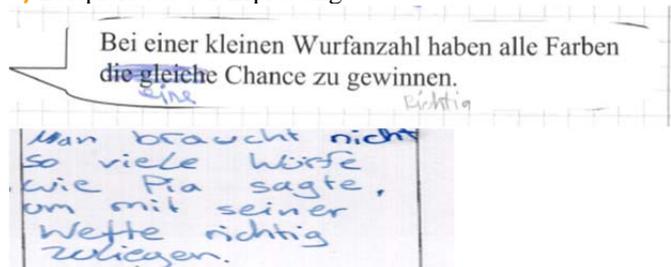
Bei wenigen Drehungen ist die Wette auf das Glücksrad nicht sicher. Sicherer wird die Wette bei mehreren Drehungen, weil ...

dann die Gewinnchancen höher sind als bei wenigen Drehungen.

Die Begründung für die höhere Sicherheit bei großer Zahl von Versuchen stimmt so nicht, es liegt daran, dass sich die Ausnahmen mehr ausgleichen.

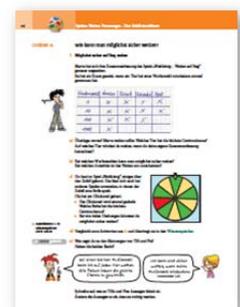
O1 Lernwege

e) Beispiele aus der Erprobung



Mögliche Schwierigkeiten:

- Bei 1a) wird der Ameise nur noch die gleiche Chance zugestanden wie den anderen Tieren im kleinen Wurfzahlbereich, d.h. eine Verknüpfung mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit findet nicht mehr statt.
- Bei 1b) wird über die Drehstärke/ Verteilung der Felder/ Drehlänge argumentiert. Tills Aussagen wird in Bezug auf die Tabelle aus 1a) als richtig gewertet; das Wort „gleiche“ wird überlesen.



Ordnen B

Welche Regelmäßigkeiten zeigt der Zufall?

Schnellzugriff

O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- sichern ihre Erfahrung, dass Standort-Bereiche besser geeignet sind als absolute Zahlen, um Zufallsschwankungen in den Griff zu bekommen;
- sichern ihre Fähigkeiten, relative und absolute Häufigkeiten zu bestimmen;
- vertiefen die Einsicht in die unveränderten Standortbilder auf lange Sicht.

O2 Bezug

Systematisiert die Erfahrungen aus **E5-E7** weiter mit **V6-8, V9-17**

O2 Vorbereitung/Material

ggf. Standortbilder aus **ab)** auf Folie mitbringen
ggf. Computer mit Applet Wettkönig (man kann im hinteren Bereich die Farbverteilung umstellen)

O2 Umsetzungsvorschlag (20-30 min)

2a)	Zuordnen der Standortbilder zu Drehanzahlen, dann gemeinsam kontrollieren	EA PA
2b)	Verschriftlichen der Analysen zu Einzelhäufigkeiten	EA
	Überprüfen mit Computer	PA
	Vergleich der Lösungen zu a) und b)	UG
2cd)	Wechsel zwischen Darstellungen: Zahlen eintragen und Verfahren gegenseitig erklären Als Kontrolle mit Rechner überprüfen	PA
	Vergleich der Lösungen aus c) und d)	GA/UG
	Eintrag in den Wissenspeicher	EA/PA

Mögliche HA: V6, V7, V8, V9

Intensivzugriff

O2 Umsetzungshinweise

Variante: Überprüfung durch Computer kann aus Zeitgründen weggelassen werden

O2 Diagnose

- Inwiefern werden die Standortbilder richtig gelesen?
- Inwiefern ist das Konzept der relativen Häufigkeit als Betrachten in Anteilen (hier Prozenten) noch präsent?
- Inwiefern kann zwischen absoluten und relativen Häufigkeiten und Balkendiagrammen übersetzt werden?

O2 Erwartungshorizont

a) 10-mal gedreht: (3), weil das Ergebnis sehr von der Farbverteilung abweicht bzw. es nicht so wenig gelb geben sollte bei hohen Wurfanzahlen

100-mal gedreht: (1), weil das Ergebnis zwar schon näher an der Farbverteilung ist, aber grün und gelb nicht gleich sein sollten

1000-mal gedreht: (2), weil es am wenigstens rot gibt und dann gucken, wie die anderen Balken dazu liegen

b) Die letzte Zeile (1000) passt am besten, weil es am meisten grün und am wenigsten rot gibt. Außerdem gibt etwas weniger gelb als grün, das ist genau so viel, wie es rot überhaupt gibt.

Wie oft?	Rot in %	Grün in %	Gelb in %
10	20	60	20
100	10	45	45
1000	10 %	50	40

c) Till verschiebt eine Stelle nach links oder rechts, je nachdem wie groß die Drehanzahl ist.

Wie oft?	Rot	Grün	Gelb
10	2	6	2
100	10	45	45
1000	100	500	400

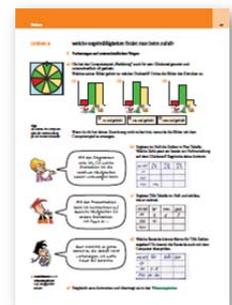
d) Merve gibt einen Bereich um Tills Zahlen an, z.B. den Bereich 400-600 für grün.

O2 Lernwege

Die meisten Lernenden können durch die enge Führung ihre Einsichten sichern.

Mögliche Schwierigkeiten:

- **a)** (1) wird 1000-mal drehen zugeordnet, weil der grüne Balken am größten ist; Relation der Balken zueinander in Bezug auf Farbverteilung wird nicht berücksichtigt
- Aufgabe **b)** wird nicht ganzheitlich gesehen, sondern jeweils einzeln gelöst. Dabei geben **c)** und **d)** jeweils Hinweise für die Teilaufgabe davor.
- Es wird kein Unterschied zwischen den Zeilen gemacht/ in alle Zeilen wird aufgrund der Farbverteilung das gleiche eingetragen statt sich an den Säulendiagrammen zu orientieren. Auch die letzte Zeile wird lediglich geschätzt statt sich an die Farbverteilung zu halten.
- Tills Vorgaben passen nicht zu den eigenen Schätzungen aus **b)** etwas weniger gelb als grün.



Vertiefen 1 Welche Wetten sind sicherer?

Hintergrund	Die Aufgaben V1 und V2 dienen zur Aktivierung und Vertiefung der Begriffe „sichere Wetten“ und „unsichere Wetten“, die im Kapitel den zentralen Ausgangspunkt für die Untersuchung zufälliger Phänomene darstellen. Dabei findet eine erste, gezielte Reflexion der Rolle des Zufalls statt.
--------------------	--

V1 Ziel: Einordnen von Wetten als sicher/ unsicher

Dauer	10 min
Bezug	Führt Thema der Einstiegsseite weiter. Fortsetzung durch Erfinden eigener Wetten in V2 .
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Aufgabe dient der Festigung der Begriffe sicher/ unsicher. Zufällige Ereignisse erscheinen hier als die nicht vorhersagbaren. Die Lösungen sind z.T. subjektiv und geprägt von individuellen Vorkenntnisse (z.B. Würfeln 1) oder äußeren Umständen (Regen). Im Vordergrund stehen die Begründung für die Einsortierung, nicht die normative Bewertung als richtig oder falsch. Die Extreme „sehr sicher“ und „unsicher“ sollten gemeinsam an Beispielen nachvollzogen werden. <i>Umsetzung:</i> Aufgabe ist als HA geeignet (bis auf Diskussion in b)).
Lernwege	<i>Mögliche Irritation:</i> „Unsicher“ wird von einigen Kindern missinterpretiert als „man verliert diese Wette“, tatsächlich ist gemeint, dass man nicht weiß, ob man gewinnt.

V2 Ziel: Erfinden eigener sicherer und unsicherer Wetten

Dauer	10 min
Bezug	nach Einstiegsseite und V1

Vertiefen 2 Wetten auf Sieg

Hintergrund	Die Erfahrungen zu den Mustern, die der Zufall beim Spiel „Wettkönig – Wetten auf Sieg“ zeigt, werden in V4 und V5 weiter reflektiert und mit typischen Fehlvorstellungen konfrontiert. In V3 werden sie auf ein anderes Zufallsgerät übertragen.
--------------------	--

V3 Ziel: Übertragen der Idee einer besten Wette auf neues Zufallsgerät

Dauer	5-10 min
Bezug	nach E2 , ggf. als Vorbereitung auf O1 als HA geeignet.
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Zu dem grundsätzlichen Transfer der Farbverteilung als ausschlaggebend für die Gewinnchancen kommt hier das Abwägen der Glücksräder gegeneinander hinzu. <i>Differenzierung:</i> Erweiterungsimpuls für stärkere Lernende: Wie sähe der „Wettkönig“-Würfel als Glücksrad aus?
Lernwege	Beispiel für eine reflektierte Lösung aus der Erprobung, die sich der begrenzten Sicherheit der Wette bewusst ist: <i>Mögliche Irritationen:</i> <ul style="list-style-type: none"> - Die Lage der Felder wird von manchen überbetont als ausschlaggebend für das Ergebnis. Das heißt, z.B. wird Glücksrad 1 als wahrscheinlicher eingestuft, weil hier mehrere Blaue direkt nebeneinander liegen. - Die Frage nach der Verbindung zum Wettkönig wird nicht verstanden und/oder zu oberflächlich beantwortet („gleiche Farben“ o.ä.), daher zumindest diese Frage im UG gründlich besprechen. - Einige Lernende halten Glücksräder für leicht beeinflussbar, deswegen wird ein automatisches Glücksrad genommen.

Wenn überhaupt würde ich bei dem dritten Rad auf rot tippen, aber auch da gibt es nur eine 50:50 Chance. Bei dem anderen Rädern ist die Chance aber noch kleiner.

V4 Ziel: Reflektieren von Vorstellungen zum Zufall

Dauer	10 min
Bezug	nach O1
Hinweise	<i>Einordnung:</i> In der Aufgabe werden typische Schülervorstellungen aufgegriffen und reflektiert. Hierzu sollte die Unterscheidung zwischen bester und sicherer Wette eingeführt werden.

V5 Ziel: Reflektieren der Aussagekraft für den Einzelfall

Dauer 15 min
Bezug nach O1 (z.T. Wiederholung von Teilaufgabe e)
Hinweis Umsetzung: bei auftretenden Zweifeln lohnt eine gemeinsame Diskussion
Lernwege Von manchen Kindern (wie nebenstehend aus der Erprobung) wird Merve als richtig gewertet. Dann lohnt sich die Nachfrage, ob es dennoch eine beste Wette für den einzelnen Wurf gibt.

Merve hat Recht, denn bei einem einzelnen Wurf ist alles möglich

Vertiefen 3 Absolute und relative Häufigkeiten angeben

Hintergrund In V6 wird direkt an das Kapitel „Brüche vergleichen und addieren“ angeknüpft und Trefferquoten nach ihrer relativen Häufigkeit sortiert. In V7 wird die Umrechnung von absoluten und relativen Häufigkeiten (= „in Anzahlen und in Prozent“) wiederholt. In V8 wird beides verknüpft, um Auswahlentscheidungen zu treffen.

V6 Ziel: Erinnern an den Vergleich von Trefferquoten über relative Häufigkeiten

Dauer 7-10 min
Bezug nach E3 oder O2
Hinweise Einordnung: Neben der Entscheidung, das Glück durch relative Häufigkeiten zu erfassen, müssen die Anteile vergleichbar gemacht werden durch Verfeinern/ Vergrößern der Anteile oder durch die Umrechnung in Prozente.
 Differenzierung: Leistungsschwächere an Streifentafeln als Hilfe erinnern.
Lernwege Manche Schülerinnen und Schüler betonen die Rolle des Risikos und erklären, dass Johanna, Arthur und der Vater am meisten Glück hatten, weil sie insgesamt nur so wenige Lose gekauft haben, dass der Gewinn da subjektiv betrachtet „wertvoller“ ist als bei den anderen. Hier hilft evtl. die Frage, wer denn gewonnen hätte, wenn alle gleich viele Lose gekauft hätten und sich an ihrem Glück nichts geändert hätte (lenkt aufs Erweitern im Sinne des Hochrechnens).

V7 Ziel: Umrechnen zwischen absoluten und relativen Häufigkeiten

Dauer 10 min
Bezug nach E3 oder O2
Hinweise Einordnung: Umrechnen zwischen absoluten und relativen Häufigkeiten in beide Richtungen üben. Für die letzte Spalte wird logisch geschlossen auf die Gesamtzahl an Würfeln bzw. auf 100 Prozent.
 Differenzierung: Für leistungsstärkere Schüler als Ergänzung zu b): Wie sähe ein Würfel ungefähr aus bei diesem Spiel? Wieso ist es schwierig, das zu beantworten? Gibt es mehrere Lösungen? Wie sähe das Balkendiagramm dazu aus?
Lernwege Mögliche Irritationen: Die ungefähren Werte können zunächst problematisch erscheinen. Hier sollte das Runden explizit erlaubt werden.

V8 Ziel: Umrechnungen von Häufigkeiten und Auswahl

Dauer 10-15 min
Bezug nach O2
Hinweise Hintergrund: Für Würfel E gibt es mehrere Lösungen. Er kann zwar mit den anderen verglichen werden, allerdings ist eine relative Häufigkeit bei einem kleinen Wurfanzahlen viel unzuverlässiger als bei großen Wurfanzahlen. Daher wird hier die Wurfanzahl insgesamt benötigt, um die Qualität dieser Angabe einschätzen zu können.
 Umsetzung: Die Frage nach dem geschickten Berechnen von Werten sollte im UG vor der Bearbeitung (in EA oder PA) thematisiert werden, da sie sonst untergehen könnte. Im UG nachfragen: Wieso kann man bei D keine Aussage treffen, bei E aber schon, obwohl auch nur eine Zahl angegeben ist?

Vertiefen 4 Voraussagen für Häufigkeiten machen

Hintergrund	Aufgrund der Farbverteilung sollen relative Häufigkeiten geschätzt werden. Dabei klingt immer wieder der Unterschied zwischen rein theoretischen Überlegungen und empirisch leicht abweichenden Ergebnissen aufgrund des Einflusses des Zufalls an.
--------------------	---

V9 Ziel: Einüben der Schätzung relativer Häufigkeiten aus Farbverteilungen

Bezug	nach O2
Hinweise	<i>Umsetzung:</i> Einfache Aufgabe ist als HA geeignet. <i>Differenzierung:</i> Mit leistungsstärkeren Lernenden kann thematisiert werden, dass die Spanne bei b) 30-70 mal gerechtfertigt ist, bei c) 300-700 mal allerdings schon sehr breit.
Lernwege	<i>Mögliche auftauchende Schwierigkeiten:</i> - Zahlen werden nur qualitativ abgeschätzt, nicht konkret berechnet („Gelb hat viel mehr als Rot“). - Anstelle mathematischer (theoretischer) Hochrechenstrategien, werden Sonderfälle betont. Dann gezielt fragen, welche Verteilung am wahrscheinlichsten ist, Schwankungen einbeziehen. - Die Lage der Felder zueinander wird überbewertet (z.B. „Rot hat eine größere Chance, weil es so weit auseinander liegt“ → Auf Zufallscharakter des automatischen Glücksrades verweisen.

V10 Ziel: Voraussagen einer Häufigkeit in anderem Kontext

Dauer	7 min
Bezug	Transfer zu V9 , als kurze HA geeignet

V11 Ziel: Voraussagen von Häufigkeiten aus Farbverteilungen

Dauer	ca. 10 min
Bezug	nach O2, b) kann durch V16 ergänzt werden
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Die Aufgabe ist strukturell sehr ähnlich zum Wettkönig - Wetten auf Standorte und dient daher zum Einüben von Hochrechen-Fertigkeiten und Umrechnungen in Prozent. Außerdem ist wichtig, die Rolle des Zufalls als Abweichen der empirischen Ergebnisse vom Idealwert zu reflektieren.

V12 Ziel: Operatives Üben der Voraussagen von Häufigkeiten nach Farbverteilung

Dauer	10 min
Bezug	nach O2 und V11
Hinweise	<i>Umsetzung:</i> in Partnerarbeit
Lernwege	<i>Mögliche Schwierigkeiten:</i> Beim Tipp wird ein unwahrscheinliches Ergebnis gewählt, weil besondere (vom erwarteten abweichende) Ergebnisse betont werden. → Das bei b) ratende Kind darf dann dazu auffordern, ein weiteres, typischeres Ergebnis als Tipp zu bekommen.

V13 Ziel: Zuordnen von Wurfanzahlen zu theoretischen und empirischen Verteilungen

Dauer	5 min
Bezug	nach O2 ähnlich zu O2a) . Einfache Aufgabe ist als HA geeignet.
Hinweise	<i>Differenzierung:</i> Leistungsstärkere Lernende können selbst Bilder und mögliche Wurfanzahlen entwerfen und sich gegenseitig Aufgaben stellen.
Lernwege	<i>Mögliche auftauchende Schwierigkeiten:</i> Für die Zuordnung wird nur der rote Balken betrachtet und die Relation zu den anderen ausgeblendet. Oder es erscheint nur die Höhe der Balken relevant: z.B. wird (1) zu 1000 zugeordnet, weil hier viele Balken sehr hoch sind. Hier kann explizit aufgefördert werden, alle Balken und deren Verhältnis zueinander zu betrachten.

V14 Ziel: Voraussagen und Validieren von Häufigkeiten aus Farbverteilungen

Dauer 15-20 min
Bezug nach O2, als HA geeignet
Hinweise *Einordnung:* Kombination von Hochrechnungen, Angaben von Bereichen und für absolute Häufigkeiten und relative Häufigkeiten.
 Außerdem ändert sich die Blickrichtung: in **a)** wird von der Farbverteilung ausgegangen und auf das empirische Ergebnis geschlossen; in **b)** ist es andersrum. Außerdem soll die Wahrscheinlichkeit von unerwarteten Ereignissen beurteilt werden.
 In **d)** sind keine näheren Informationen zur Seitenanzahl von Pias Würfel angegeben. Hier kann thematisiert werden, dass es dafür verschiedene Möglichkeiten gibt (z.B. 10 oder 20 Seiten)
 Umsetzung: Erst in Einzelarbeit und dann Kontrolle in Partnerarbeit.

V15 Ziel: Zuordnen von Farbverteilungen auf dem Würfel und Versuchsreihen

Dauer ca. 10 min
Bezug **b)** kann in **V18** aufgegriffen werden
Hinweise *Einordnung:* Die Zuordnung regt zur Diskussion des Zusammenhangs zwischen Farbverteilung, empirischem Ergebnis und Abweichung zwischen beiden an.
Differenzierung: Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können die Gründe für die Ähnlichkeit der Tabellen 2 und 4 diskutieren. Diese sind so ähnlich, dass eine klare Zuordnung nicht möglich ist. Zurückgeführt werden kann dies auf die Schwankungen, die durch den Einfluss des Zufalls zustande kommen.
Lernwege *Mögliche auftauchende Schwierigkeit:* Für schwächere Lernende kann der Rechenaufwand herausfordernd sein, dann helfen Hinweise auf Strategien mit der Wurfanzahl 500 geschickt umzugehen.

V16 Ziel: Reflektieren von Vorstellungen zum Zufall auf lange und kurze Sicht

Dauer 5 min
Bezug Zur näheren Betrachtung der Schwankungen: **V18**, Tills Aussage ist ähnlich wie in **V11**
Hinweise *Einordnung:* Hier werden die Abweichungen durch den Zufall reflektiert und die Schranke, ab der die Standortbilder ähnlich aussehen, genauer betrachtet.
Umsetzung: Erst in Einzelarbeit die Aussagen korrigieren lassen, dann Kontrolle in Partnerarbeit.
Lernwege *Mögliche auftauchende Schwierigkeiten:*
 - Ole wird mit einer zu kleinen Zahl korrigiert
 - „Standortbilder sehen nie ähnlich aus (für 5 Würfe)“ Dann sollte zur Exaktifizierung aufgefordert werden.

V17 Ziel: Kontrolle durch Umrechnen von gegebenen Farbverteilungen

Dauer 5-10 min
Bezug nach O2, als HA geeignet
Hinweise *Einordnung:* Transferaufgabe. Abwägung, wie weit sich die Wettbereiche in Abhängigkeit von der Wurfanzahl 2000 befinden.
 Zur Überprüfung von **b)** kann auf die ausgefüllten Wettprotokolle verwiesen werden mit dem Auftrag, ein ähnliches Ergebnis zu finden bei Wurfanzahl 10 oder 20.

Vertiefen 5 Entwicklung von Häufigkeiten untersuchen

Hintergrund	Das Gesetz der großen Zahlen soll mit Hilfe dynamischer Darstellung als Säulendiagramme verdeutlicht werden. Zudem soll auf die Betrachtung statistischer Kenngrößen und Streumaße hingeführt werden. (kann bei Zeitmangel oder für schwächere Lernende weggelassen werden)
V18	Ziel: Empirisch die Schwankungsverläufe der relativen Häufigkeiten untersuchen
Dauer	20 min
Material	Computer mit installierter Software
Bezug	Vertiefende Zusatzetappe nach E4-E6 bzw. O2 , (für starke Lernende)
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Das Sprungverhalten der absoluten Zahlen im Gegensatz zu relativen Häufigkeiten wird hier analysiert. Die Aufgabe bereitet auf die Betrachtung von Streumaßen wie der Spannweite zwischen Minimum und Maximum vor.
V19	Ziel: Schwankungsverläufe der relativen und absoluten Häufigkeiten abgrenzen
Dauer	20 min
Material	Computer mit installierter Software
Bezug	nach V18 , kombiniert und verdeutlicht Elemente aus E4 und E5
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Stabilisation der relativen Häufigkeiten bei steigender Wurffanzahl im Längsschnitt beobachten. Dies ist die Kombination der Beobachtungen zum Bewegungsverhalten der relativen Häufigkeiten (Pia) und der Balken (Ole) aus E4 und E5 <i>Umsetzung:</i> diese Aufgabe lässt sich gut in PA am Rechner durchführen. Falls das nicht möglich ist, lassen sich a) und b) auch im Plenum erarbeiten, dann tragen die Lernenden die Werte ein und bearbeiten c) und d) in Partnerarbeit.
V20	Ziel: Reflektieren von Vorstellungen zu Schwankungsverläufen
Dauer	5 min
Material	Materialblock
Bezug	nach V19
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Analyse von Ergebnissen in grafischer Darstellung und Bewertung als nicht glaubwürdig aufgrund zu großer Schwankungen im Bereich hoher Wurffanzahlen.

Vertiefen 6 Den Zufall im Griff haben

Hintergrund	Der Fokus liegt hier auf der expliziten Reflexion der erarbeiteten Konzepte mit zusammenfassender Darstellung. Zudem soll der Bezug zum Auftakt hergestellt werden. Dieses Vertiefen ist für alle Lernenden wichtig.
V21	Ziel: Reflektieren der erworbenen Kenntnisse
Dauer	10-15 min
Bezug	nach E und O und hinreichend vielen Übungsaufgaben
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Abschließender Transfer der Kernideen des qualitativen Beurteilens von Abweichungen von erwarteten Ergebnissen. Relative Häufigkeiten zeigen hier den Mehrwert, „Schummeln“ leicht auf die Schliche kommen zu können. Außerdem wird das Änderungsverhalten von Häufigkeiten bei zunehmender Versuchsanzahl beschrieben.
V22	Ziel: Reflektieren des Phänomens Zufall
Dauer	5-10 min
Bezug	nach E und O und hinreichend vielen Übungsaufgaben, als HA geeignet
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Reflexion über den Titel des Kapitels und individuelle Zusammenfassung der gelernten Konzepte. Das ist auf Ebene der Verbalisierungsanforderung sehr anspruchsvoll, lohnt sich aber zum explizieren der vollzogenen Konzeptwechsel.
Lernwege	<i>Mögliche Schwierigkeiten:</i> Die Lernenden können ihre Erkenntnisse nicht verbalisieren. Hier brauchen sie rechtzeitig Unterstützung.
V23	Ziel: Abschließende Reflexion zum Zufall bzgl. Ausgangsthema Wetten
Dauer	10-15 min
Bezug	zentrale Abschlussaufgabe, die Bogen zur Einstiegsseite spannt
Material	ggf. Wetten aus Wettbüro vom Auftakt mitbringen
Hinweise	<i>Einordnung:</i> Die Lernenden können erleben, wie das Kapitel zur Beantwortung der eingangs gestellten Frage zum Kontext Wettbüro beiträgt. Damit wird das Kapitel rund abgeschlossen. Diese Aufgabe sollte in jedem Fall zum Abschluss des Kapitels behandelt werden.

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- führen mathematische Analysen durch, um Spielstrategien zu fundieren.
- nutzen verschiedene Darstellungen um das Phänomen Zufall zu deuten und können auch Zusammenhänge mit Hilfe von Darstellungen erläutern.

In diesem Kapitel nutzen die Schülerinnen und Schüler die Säulendiagramme, tabellarische Darstellungen und Rechnungen, um Muster zu erkunden.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- führen kleinere Untersuchungen mit Hilfe des Computers durch.
- beurteilen Arbeitsergebnisse anderer.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen Spielsituationen und Zufallsexperimente, präsentieren sich gegenseitig ihre Ergebnisse, die sie auch beurteilen müssen. Das geschieht zum Teil in Partnerarbeit aber auch in der Klasse.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Schreiben und Sprechen: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende (dauerhaft) aktiv nutzen können (zum Teil aus alten Kapiteln):

- diese Wette ist sicher/ unsicher
- je höher die Wurfanzahl, desto...
- blau hat eine höhere Gewinnchance als lila
- der Anteil an/ von etwas,
- das Prozent, die Prozente, die Prozentzahl
- ich vergleiche die relative/ absolute Häufigkeit
- ich rechne hoch
- die Werte schwanken in dem Bereich
- der Zufall

Lesen und Zuhören: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende in ihrer Bedeutung erfassen, aber nicht unbedingt selbst nutzen können:

- das Zufallsexperiment
- auf lange Sicht
- sie sagen die relative Häufigkeit voraus
- sie übertragen die Farbverteilung

Überprüfung

Als weitreichenden **zusätzlichen Leistungsnachweis** für eine Differenzierung nach oben bietet sich hier die selbständige Untersuchung anderer Spiele an. Diese kann vorgetragen oder schriftlich als kleine Facharbeit abgegeben werden. Mögliche Leitfragen:

- Wie funktioniert das Spiel?
- Welche Rolle spielt dabei der Zufall?
- Welche Spielergebnisse können vorausgesagt werden? Wie sicher sind diese Voraussagen?
- Wo könntest du Wissen über den Zufall nutzen, um schlauer zu spielen?



Checkliste

Spielen, Wetten, Voraussagen –
Den Zufall einschätzen

Ich kann ...
Ich kenne ...

Hier kann ich
üben ...

- K1** Ich kann Alltagsbeispiele angeben für nicht sichere und sicherere Wetten.
Welche der beiden Wetten ist sicherer?
Begründe deine Antwort.
 (1) Ich wette, dass das Baby schon nächste Woche laufen kann.
(2) Ich wette, dass das Baby nicht sprechen kann. S. 10 Nr. 1, 2
-
- K2** Ich kann die besten Gewinnchancen herausfinden.
Der Sechser-Würfel hat zwei rote, drei blaue und eine gelbe Seite.
Auf welche Farbe würdest du wetten?
 S. 11 Nr. 3
-
- K3** Ich kann bei Spielen mit Würfeln, Münzen oder ähnlichem beurteilen, welche Wette sicherer ist.
Erkläre, welche der beiden Wetten sicherer ist.
 (1) Wetten, dass beim nächsten Mal Rot gedreht wird?
(2) Wetten, dass bei 100-mal Drehen Rot am häufigsten gedreht wird? S. 11 Nr. 4, 5
-
- K4** Ich kann absolute Häufigkeiten in relative Häufigkeiten umrechnen, um zu vergleichen.
Wie viel Prozent sind 40 Treffer von 200 Würfeln? S. 12 Nr. 7, 8
S. 15 Nr. 15
S. 17 Nr. 21
-
- K5** Ich kann erklären, warum ich bei großen Wurfzahlen besser wetten kann.
Erkläre, welches der beiden Ergebnisse bei einem Zufallsversuch (Wurf einer Münze) mit einer großen Wurfanzahl entstanden ist. S. 14 Nr. 13, 14
S. 15 Nr. 16, 17
S. 17 Nr. 21
① Kopf 41 % und Zahl 59 % oder ② Kopf 49 % und Zahl 51 %
-
- K6** Wenn ich die Farbverteilung auf einem Würfel kenne, kann ich vorhersagen, wie häufig etwa jede Farbe bei einer großen Wurfanzahl erscheinen wird.
Denke dir eine Farbverteilung für einen Zwanziger-Würfel aus und sage die absolute Häufigkeit jeder Farbe bei 600 Würfeln voraus. S. 12 Nr. 7, 8
S. 13 Nr. 9–12
Gib auch die relativen Häufigkeiten an.

► *Hinweis:* Im Materialblock auf Seite 21 findest du diese Checkliste für deine Selbsteinschätzung. Zusätzliche Übungsaufgaben findest du im Internet unter www.mathewerkstatt.de 046-1. (www.cornelsen.de/mathewerkstatt, Buchkennung: MWS040018, Mediencode: 046-1)

Kompetenzen aus vorangegangenem Kapitel Brüche vergleichen und addieren:

- K6** Ich kann Anteile als Bruch und als Prozentzahl darstellen.
K3 Ich kann Brüche schätzen und Summen von Brüchen überschlagen

Basiskompetenzen, die in der Übe-Kartei für das spätere Vertiefen aufgegriffen werden:

- K2** Ich kann die besten Gewinnchancen herausfinden.
K6 Wenn ich die Farbverteilung auf einem Würfel kenne, kann ich vorhersagen, wie häufig etwa jede Farbe bei einer großen Wurfanzahl auftauchen wird.

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**:
<http://www.ko-si-ma.de> → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 7,
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040018):
www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 7 oder mathewerkstatt 3.

	Zufall 1	Bild der Einstiegsseite (SB KOSIMA)
	Zufall 2	Arbeitsmaterial <i>Wettkönig</i> (SB E1 MB & CORNELSEN)
	Zufall 3	Arbeitsmaterial <i>Wettprotokoll 1</i> (SB E2 MB)
	Zufall 4	Applet zu dem Spiel <i>Wettkönig</i> (SB E2 und E5 CORNELSEN, Mediencode: 033-1)
	Zufall 5	Arbeitsmaterial <i>Wettprotokoll 2</i> (SB E2 MB)
	Zufall 6	Arbeitsmaterial <i>Wetten auf Standorte</i> (SB E4 MB)
	Zufall 7	Arbeitsmaterial <i>Standorte untersuchen</i> (SB E5 MB)
	Zufall 8	Wissenspeicher <i>Brüche 4</i> (SB E6 MB Kl. 6)
	Zufall 9	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Brüche 4</i> (SB E6 KOSIMA)
		Zufall 10
Zufall 11		Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Zufall 1</i> (SB O1 KOSIMA)
Zufall 12		Wissenspeicher <i>Zufall 2</i> (SB O2 MB)
Zufall 13		Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Zufall 2</i> (SB O2 KOSIMA)
	Zufall 14	Wissenspeicher <i>Brüche 4</i> (SB V6 MB Kl. 6)
	Zufall 15	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Brüche 4</i> (SB V6 KOSIMA)
	Zufall 16	Arbeitsmaterial <i>Häufigkeiten untersuchen</i> (SB V19 MB)
	Zufall 17	Arbeitsmaterial <i>Häufigkeit darstellen</i> (SB V19 MB)
	Zufall 18	Arbeitsmaterial <i>Oles Häufigkeiten</i> (SB V20 MB)
	Zufall 19	Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 046-1)
	Zufall 20	Checkliste zum Ausfüllen (SB MB & CORNELSEN)