

Landschaften vermessen – Dreiecke konstruieren



Didaktischer Hintergrund zum Kapitel.....	ab Seite 2
Einstieg	ab Seite 6
Erkunden	ab Seite 8
Ordnen	ab Seite 15
Vertiefen	ab Seite 21
Checkliste	ab Seite 22
Materialübersicht für dieses Kapitel.....	ab Seite 24

Herausgegeben von:

Timo Leuders
Susanne Prediger
Bärbel Barzel
Stephan Hußmann

Autoren:

Stephan Hußmann
Gilbert Greefrath

Redaktion:

Raja Herold

© 2014 Kosima-Projekt:

Zitierbar als Hußmann, Stephan & Greefrath, Gilbert (2014): Landschaften vermessen – Dreiecke konstruieren. In: Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B. & Hußmann, S. (Hrsg.): Handreichungen zur Mathewerkstatt 7. Dortmund/ Freiburg: Kosima. Online unter: www.ko-si-ma.de.

© 2014 Cornelsen Schulverlage GmbH, Berlin:

Das Copyright gilt für alle dargestellten Seiten und Auszüge von Seiten des Schülerbuches und des Materialblocks der *mathewerkstatt*; Rechteinhaber und Bildquellen sind in den entsprechenden Bildnachweisen dieser Produkte ausgewiesen.

Titel **Landschaften vermessen – Dreiecke konstruieren**

Thema **Kongruenzsätze und besondere Punkte in Dreiecken**

Kontexte – Kernfragen – Kernideen

Die historische Entwicklung der Mathematik lässt sich für einige inhaltliche Schwerpunkte im Unterricht (nach-) erlebbar gestalten. Dies trifft insbesondere für die Landvermessung zu, bei der die Dreieckssätze genutzt wurden, um Größen, die nicht zugänglich sind oder deren Messung zu aufwändig ist, zu bestimmen.

Kernfrage A: Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Mit Hilfe des Übertragens der realen Situation auf eine Karte kann ein eindeutiges Dreieck konstruiert werden, dessen Maße auf der Karte bestimmt werden.

Kernfrage B: Wie viele Angaben benötige ich, um Dreiecke zu zeichnen?

Nicht immer hat man ausreichend oder die richtigen Angaben, um eindeutige Dreiecke zu konstruieren. In welchen Fällen drei Angaben ausreichen und welche Spezialfälle auftreten können, wird hier erkundet und anschließend systematisiert.

Kernfrage C: Wie kann ich die Mitte finden?

Unter der Zielperspektive, die Mitte in bestimmten Landschaftskonstellationen zu finden, geht es darum zuerst Orte zu finden, die gleichweit weg liegen von bestimmten Punkten (Schnittpunkt von Mittelsenkrechten in Drei- oder Vierecken) und dann darum, Orte zu finden, die gleichweit weg liegen von bestimmten Strecken (Schnittpunkt von Winkelhalbierenden in Drei- und Vierecken). In beiden Fällen soll, ausgehend von zwei Punkten oder zwei Strecken, das Verfahren selbst entwickelt werden. Dabei wird deutlich, dass der Schnittpunkt in Dreiecken eindeutig und in Vierecken nicht eindeutig ist, aber unter bestimmten Optimierungsbedingungen bestimmt werden kann.

Kompetenzen

K1: Ich kann aus drei Seitenlängen mit und ohne DGS Dreiecke konstruieren.

K2: Ich kann aus Seitenlängen und Winkeln mit und ohne DGS Dreiecke konstruieren.

K3: Ich kann eine Konstruktionsbeschreibung so erstellen, dass sie nachvollziehbar und übersichtlich ist.

K4: Ich kann beschreiben, wie man mit Hilfe von Dreiecken Seitenlängen und Winkelgrößen bestimmt, auch wenn man einige Größen nicht direkt messen kann.

K5: Ich kann erkennen, mit welchen Angaben sich ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt, und kann das Dreieck dann auch konstruieren.

K6: Ich kenne besondere Linien wie die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende und kann sie konstruieren.

K7: Ich kenne die verschiedenen Mittelpunkte im Dreieck und kann sie konstruieren.

Zusammenhang

bis Kl. 6

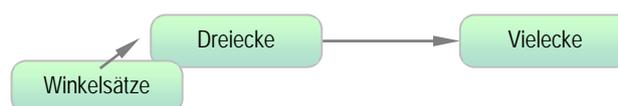
Kl. 7

ab Kl. 8

Daten und Zufall

Zahl und Maß

Raum und Form

Beziehung und
Veränderung

Struktur

ca. 3-4 Wochen

Auftakt: Erste Sensibilisierung für die Möglichkeit bei der Größenmessung.			45	
A Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?			E	O
E1 Dreiecke mit drei gegebenen Seiten von einem zu einem anderen Orttransportieren			45	
E2 Landkarten mit Hilfe von Dreiecken mit drei gegebenen Seiten erstellen	O1 Dreiecke aus drei Seiten konstruieren mit Konstruktionsbeschreibung	V1-V3 Dreiecke erstellen mit gegebenen drei Seiten	30	25
E3 Landkarten mit Hilfe von Dreiecken mit einer Seite und zwei Winkeln erstellen		V4-V6 Dreiecke erstellen mit zwei Winkeln und einer Seite	30	20
E4 Messungen mit Hilfe von Karten und Dreieckskonstruktionen durchführen	O2 Einen Plan auf Papier erstellen		25	
E5 Landkarten mit Hilfe von Dreiecken mit zwei Seiten und einem Winkel erstellen	O3 Dreiecke bezeichnen und konstruieren	V7-V8 Dreiecke konstruieren und beschreiben V9-V16 Dreiecke mit verschiedenen gegebenen Größen konstruieren	20	25
B Wie viele Angaben benötige ich, um Dreiecke zu zeichnen?			E	O
E6 Dreiecksangaben danach sortieren, ob man kongruente Dreiecke erhält	O4 Kongruente Dreiecke O5 Dreiecke mit DGS konstruieren O6 Dreiecke aus drei Angaben konstruieren (Systematisierungsaufgabe zu E6)	V17-V22 Dreiecke konstruieren mit unterschiedlichen Angaben	45	15 30 45
C Wie kann ich die Mitte finden?			E	O
E7 Gleich weit weg von drei, vier Städten	O7 Gleich weit weg von zwei, drei, vier Punkten	V23-V32 Besondere Punkte und Linien im Dreieck	45	45
E8 Gleich weit weg von drei, vier Straßen	O8 Gleich weit weg von zwei, drei, vier Strecken		45	45

Kurzwege:

1. Ohne Exploration des Kontexts kann man pro Ordnenaufgabe zeilenweise Erkundenaufgaben weglassen und direkt die Ordnenaufgaben bearbeiten.
2. Man kann **O5** weglassen, wenn man nicht mit DGS arbeitet.
3. Man kann Etappe C weglassen, wenn man besondere Punkte um das Dreieck nicht thematisieren möchte.

Intensivzugriff

Hintergrund

Der Kontext „Landschaften vermessen“ bietet einen Bereich, in dem die Schülerinnen und Schüler die kulturelle Errungenschaft erleben können, dass man mit Hilfe von maßstabsgetreuen Dreiecken nicht zugängliche Längen und Winkel messen kann. Dabei werden den Lernenden verschiedene Situationen zur Verfügung gestellt, in denen nicht die fertige Kategorisierung der Kongruenzsätze, sondern das eigenständige Entdecken der zentralen Gelenkstellen der jeweiligen Konstruktionen im Mittelpunkt steht. Mit der Situation „Dreiecke auf dem Schulhof transportieren“ lässt sich erleben, dass Dreiecke unveränderbar bleiben, wenn man an gewissen Größen festhält. In der historischen Situation der Landvermessung in Baden-Württemberg wird die Triangulation als klassisches Verfahren der Geodäsie nacherfunden bzw. nacherlebt. In der Situation des Ausmessens der Seebreite wird der Schwerpunkt auf die Vermessung von nicht zugänglichen Größen gelegt.

Erst im Anschluss an diese Erkundungen werden mit Hilfe von Dynamischer Geometriesoftware (DGS) die Erfahrungen systematisiert und die Kongruenzsätze formuliert.

Das Kapitel schließt ab mit einer Etappe zu Winkelhalbierenden, Mittelsenkrechten und besonderen Punkten im Dreieck. Hier wird der Kontext dahingehend genutzt, dass optimale Abstände in landschaftlichen Konstellationen gefunden werden müssen.

Etappe A: Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

In dieser Etappe sollen die zentralen Kongruenzsätze dahingehend kennengelernt werden, dass sie verschiedene Möglichkeiten bereitstellen, Dreiecke eindeutig auf Karten zu übertragen und dort fehlende Größen auszumessen. Die zugrunde liegenden Kongruenzsätze kommen dabei in folgender Reihenfolge vor: sss (E1, E2), wsw (E3) und sws (E5). Sie werden aber noch nicht als solche benannt. Im Zentrum steht das Zusammenspiel aus Messungen in der Umwelt, dem Übertragen auf eine Karte, dem Messen in dieser Karte und dem Beschreiben des Vorgehens. Gesichert werden daher in dieser Etappe eine exemplarische Konstruktionsbeschreibung am Beispiel von sss (O1), dem Vorgehen, Dreieckskonstellationen auf Karten zu übertragen (O2) und den üblichen Dreiecksbezeichnungen, die man für eine funktionierende Kommunikation benötigt (O3). Dabei wird O2 durch E4 vorbereitet.

Die zugrunde liegenden Kongruenzsätze werden dann in Etappe B vom Kontext „befreit“ und einer Systematisierung zugänglich gemacht.

Etappe B: Wie viele Angaben benötige ich, um Dreiecke zu zeichnen?

In Etappe B werden die Kongruenzsätze O6 systematisch zusammengefasst und festgehalten. Zuvor wird jedoch mal dem Begriff der Kongruenz (O4) und dem Einsatz

eines DGS (O5) besondere Aufmerksamkeit gezollt. In beiden Aufgaben wird auf die Rolle der Winkel – und Seitenbezeichnungen für die Kongruenz von Dreiecken eingegangen.

Vorbereitet wird diese Systematisierung und Sicherung durch E6, in der mit den sechs Bauteilen eines Dreiecks (3 Winkel und 3 Seiten) erkundet wird, welche und wie viele Angaben notwendig sind, um dasselbe Dreieck zu konstruieren. Kongruenz wird hier verstanden im Sinne von „konstruktionsgleich“. Diese Sichtweise wird vervollständigt, indem die Kongruenz durch „Übereinanderlegen“ geprüft wird. Daher kann O4 auch gut parallel zu E6 eingesetzt werden. Zusätzlich zu den sechs Bausteinen steht ein Applet zur Verfügung, mit dem man in gleicher Art die Einzelteile zusammensetzen kann. Je nach Lerngruppe kann das Ergebnis schon eine vollständige Systematisierung aller Fälle sein. Man kann aber auch die angefangene Tabelle in E6 nutzen, um mit O6 die Systematisierung und Sicherung abzuschließen. Auch kann sich im Anschluss an die Etappe B ein Rückblick auf die Kontextsituationen aus Etappe A für das Verständnis und die nachhaltige Sicherung als förderlich erweisen.

Etappe C: Wie kann ich die Mitte finden?

Die dritte Etappe fokussiert einen weiteren Aspekt der Dreiecksgeometrie im selben Kontext: die besonderen Punkte im Dreieck und deren Konstruktion zur Bestimmung optimal gelegener Punkte zwischen mehreren Orten bzw. mehreren Straßen. In E7 und E8 erhalten die Schülerinnen und Schüler die Gelegenheit, Verfahren dafür zu entwickeln, wie man Punkte findet, die gleichweit weg liegen von Orten bzw. Straßen. In O7 und O8 werden diese Verfahren dann vom Kontext gelöst und schrittweise entwickelt, abhängig von der Anzahl der Punkte bzw. Strecken/ Geraden. Während die Lernenden somit in E7 mit dem Fall von vier Orten beginnen und erkennen, dass sich dort in der Regel kein Punkt finden lässt und damit die eindeutige Konstruierbarkeit im Fall von drei Orten schätzen lernen, wird in O7 erst ein Punkt, dann zwei Punkte, usw. thematisiert. Je nach Lerngruppe und Lernzielen lässt sich in dieser Etappe folglich die Reihenfolgen der zueinander gehörenden Erkunden- und Ordnenaufgaben variieren.

Kurzweg

Das Kapitel ist auf drei Wochen angelegt und kann unterschiedlich verkürzt werden. Auf der einen Seite ist es hier möglich, das Thema für die Kongruenzsätze ohne Kontext zu erarbeiten, was jedoch die Besonderheit der Kongruenzsätze nicht erlebbar macht. Auf keinen Fall sollte auf die Erfahrung, dass man durch die Verwendung von Karten und spezifischen Angaben in Dreiecken schwer zu messende Größen messen kann, verzichtet werden.

Auch auf die Nutzung von DGS kann verzichtet werden. Dies macht zwar einen höheren technischen Aufwand notwendig, der möglicherweise von dem Blick auf strukturelle Merkmale ablenkt, z.B. von den verschiedenen Typen notwendiger Angaben im Dreieck.

Letztlich kann man sich inhaltlich dafür entscheiden, nur die ersten beiden Etappen zu bearbeiten, welche zusammen eine semantische Einheit bilden.

Wer noch mehr Zeit sparen will, kann auch direkt mit der Landvermessung in **E2** statt mit der Einstiegsseite und dem Transport von Dreiecken in **E1** beginnen.

Diagnose

In diesem Kapitel kommen verschiedene Herausforderungen auf die Lernenden zu, denen entsprechend Aufmerksamkeit gezollt werden sollte:

- Wie exakt messen die Schülerinnen und Schüler Winkel und Längen? Wie genau gehen sie dabei mit dem Zirkel um?
- Welche Strategien nutzen die Schülerinnen und Schüler, um mit den sprachlichen Herausforderungen umzugehen, z.B. Konstruktionsbeschreibungen erstellen, Kontext erschließen?
- Welche Strategien nutzen sie, um die Dreieckstypen zu strukturieren?
- Welche Unterstützungen brauchen sie im Umgang mit dem Computer?

Literatur

Weigand, H.-G. et al. (2009): *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*. Heidelberg: Springer.

Einstiegsseite Landschaften vermessen – Dreiecke konstruieren

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- werden dafür sensibilisiert, dass für Kartenerstellungen in der Realität nicht alle Größen ausgemessen werden müssen;
- werden neugierig auf Möglichkeiten, reale Größen auf Karten auszumessen;
- diskutieren und entscheiden, welche Größen man für das Zeichnen eines Dreiecks benötigt.

Bezug

Das Kontextproblem der Einstiegsseite wird in **E1** aufgegriffen, wenn es darum geht, ein dreieckiges Feld formgleich an eine andere Stelle zu transportieren.

Vorbereitung/Material

Evtl. die Auftaktseite als Folie.

Umsetzungsvorschlag (45 min inkl. erster Reflexion)

Gemeinsames Lesen der Einstiegsseite, insbesondere um Ideen zu entwickeln, welche Größen sollte man ausmessen, um die reale Situation auf die Karte zu übertragen	UG
---	----

Jeder erstellt eine Zeichnung des Schulhofs	EA
---	----

Vergleich der selbst erstellten Karten und Ausmessen der Größen	GA
---	----

Diskussion über ein gutes Vorgehen, Größen in der Realität auf Karten zu messen	UG
---	----

HA: (ggf. längerfristige) in verschiedenen Quellen nachzulesen, wie man Landschaften vermisst und Landkarten erstellt,

Intensivzugriff Umsetzungshinweise/Alternativen

Wichtig in dieser Phase ist die gemeinsame Auseinandersetzung über den Umfang der notwendigen Größen, um eine maßstabsgetreue Karte zu erstellen. Dazu kann man auch den eigenen Schulhof auf eine Karte übertragen. Die Idee, dass das Dreieck hier gute Dienste leisten kann, sollte aber an dem Beispiel der Einstiegsseite erarbeitet werden.



Oles Ausspruch kann Anlass bieten, um über die Anzahl der notwendigen Größen zu sprechen.

Ziele des Kapitels aus Vorschauerspektive

In diesem Kapitel ...

- lernst du, wie man mit Hilfe von Dreiecken Land vermessen kann.
- zeichnest du Dreiecke und bestimmst damit unbekannte Winkelgrößen und Seitenlängen.
- lernst du, wie man in Dreiecken eine Mitte finden kann.

Erkunden A Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

E1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- lernen das Konstruieren von Dreiecken, indem sie eine Konstruktionsweise nachvollziehen;
- entdecken und verstehen, dass drei vorgegebene Seitenlängen ein Dreieck eindeutig bestimmen;
- erleben, dass man mit drei gegebenen Seiten eines Dreiecks immer dasselbe Dreieck erzeugen kann;
- lernen den Umgang mit einem dynamischen Geometriesystem (DGS) kennen;
- wiederholen das Zeichnen mit Maßstäben.

E1 Bezug

Zum Umgang mit dem DGS: Wiederholung aus **O1**.

E1 Vorbereitung/Material

Der Begriff des Maßstabs muss gegebenenfalls wiederholt werden.

- Für **a)** ggf. Kreide und ein großes Lineal bzw. Schnüre in den jeweiligen Längen bereitstellen;
für **b)** kurze Fäden bereitstellen;
für **d)** Zugang zu einem DGS ermöglichen.

E1 Umsetzungsvorschlag (ca. 45 min)

- | | | |
|------------|--|----------|
| 1a) | Lesen der Ausgangssituation, Dreieck auf dem Schulhof an andere Stellen transportieren, dabei Rückgriff auf Tills Idee. | GA |
| 1b) | Das Dreieck im Heft konstruieren (Kontrolle der Ergebnisse erfolgt durch Lösungsvergleich in c)). | EA |
| 1c) | Konstruierte Dreiecke aus b) vergleichen, gestellte Fragen in Partnerarbeit klären und schließlich gemeinsam diskutieren. | PA
UG |
| 1d) | Umgang mit dem dynamischen Geometriesystem selbstständig erkunden lassen (Verweis auf den Methodenspeicher), dann die Ergebnisse in Partnerarbeit vergleichen. | EA
PA |

Mögliche HA: V1

Intensivzugriff

E1 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Auseinandersetzung mit dem Verschieben eines Dreiecks ohne seine Form zu verändern, ist eine Vorbereitung zur Beschäftigung mit den Kongruenzsätzen. Die vorliegende Situation dient als Brücke zum späteren Konstruieren mit dem Zirkel oder einem DGS. Die Schnüre bzw. die Fäden sollen die Idee des Zirkels vorbereiten.

Es kann hilfreich sein, wenn die Schülerinnen und Schüler sich bei der Dreiecksfindung bei gespannter Schnur kreisförmig bewegen, solange bis man den dritten Punkt gefunden hat. Auch sollte man hinsichtlich der Eindeutigkeit des Dreiecks ruhig versuchen, ob man bei gespannten Schnüren auch eine andere Dreiecksform erzeugen kann.

Alternativ dazu, dass alle Schülerinnen und Schüler auf den Schulhof gehen, kann auch nur eine kleine Gruppe den Arbeitsauftrag auf dem Schulhof ausführen, während die anderen das Geschehen vom Schulfenster aus beobachten. Sollte die Aufgabe **a)** nicht auf dem Schulhof ausgeführt werden können, kann direkt mit Fäden in der Klasse gearbeitet werden. Zu bedenken ist dabei aber, dass diese Variante Probleme erzeugen kann, die im Vorwege zu prüfen sind (z.B. dass die Fäden gut gespannt sein müssen, um den gewünschten Effekt zu erzielen). Prinzipiell gilt, egal bei welcher Variante, dass die Aufgabe **E1** immer durch Beobachtung und anschließender Reflexion seitens der Schülerinnen und Schüler durchgeführt werden sollte.

Vor **d)** kann die Aufgabe **O1** bearbeitet werden, um den Umgang mit dem DGS zu erlernen.

E1 Erwartungshorizont

1a) Die Schülerinnen und Schüler reproduzieren das Dreieck auf dem Schulhof. Dabei können sie den vorliegenden Kongruenzsatz entdecken. Eine weiterführende Erkundung ist in den folgenden Aufgaben möglich.

1bc) Die Schülerinnen und Schüler übertragen das Dreieck maßstabsgetreu ins Heft und untersuchen die Dreiecke auf Kongruenz.

1d) Die Schülerinnen und Schüler erstellen beide Dreiecke mithilfe des DGS und erlernen dabei den Umgang mit dem dynamischen Geometriesystem.

Sie sollen also letztlich Erfahrungen sowohl mit Schnüren und/oder Fäden zur Dreieckskonstruktion machen als auch auf einem höheren Abstraktionsniveau mit dem DGS, hierbei insbesondere eine Ortskurve erleben.

E1 Differenzierung

Evtl. benötigen einige Schülerinnen und Schüler Hilfe bei der Maßstabsumrechnung.

Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben die Kongruenz zu erkennen, können die Dreiecke ggf. ausschneiden und dies durch Drehen überprüfen.



Erkunden A Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

E2 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- wiederholen das Zeichnen mit Maßstäben;
 - erleben die Verwendung des Zirkels als exaktes Werkzeug für Dreieckskonstruktionen;
 - üben das Zeichnen von Entfernungen mit dem Zirkel;
 - konstruieren Dreiecke mit drei gegebenen Seiten.

E2 Bezug

E1 zuvor bearbeiten (und Zeichnen mit Maßstäben wiederholen); weiter mit **O1** oder **E3**.

E2 Vorbereitung/Material

- Bei **a)** Zirkel und tatsächliche Karte von der Gegend notwendig.
Bei **b)** Vergleich mit einer realen Karte.

E2 Umsetzungsvorschlag (30 min)

- | | | |
|------------|--|----------|
| 2a) | Beispielhaft Maßstäbe aus der Tabelle bestimmen | UG |
| | Karte zu den Orten erstellen lassen | EA |
| 2b) | Besprechung der Ergebnisse aus a) zunächst in Partnerarbeit vergleichen, schließlich die Ergebnisse im Plenum sammeln | PA
UG |

Mögliche HA: V2 oder V3

Intensivzugriff

E2 Umsetzungshinweise

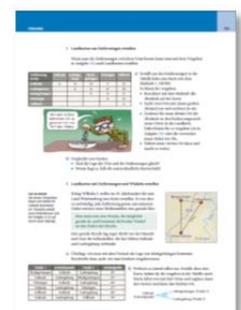
Es ist möglich, dass unterschiedliche Karten entstehen, da der dritte Ort an zwei Stellen eingezeichnet werden kann. Dies sollte unbedingt thematisiert werden. Um dieses Problem zu umgehen, kann jedem Schüler eine Kopie der richtigen Karte verteilt werden, in der nur die Lage der Orte, nicht aber der exakte Maßstab bestimmt ist.

E2 Erwartungshorizont

- 2a)** Alle Schülerinnen und Schüler errechnen die Entfernungen zwischen den Orten im vorgegebenen Maßstab. Für manche Lernende kann das Zeichnen der Entfernungen mit dem Zirkel zunächst Schwierigkeiten bereiten.
- 2b)** Die Schülerinnen und Schüler vergleichen ihre Ergebnisse aus **2a)**. Schwierigkeiten könnten bei der Begründung der Unterschiede zwischen den Karten auftreten.

E2 Differenzierung

Die Schülerinnen und Schüler können mit dem Zirkel bzw. den Fäden die Entfernungen zwischen den Städten einzeichnen.
Differenzierung: Schwächeren Schülerinnen und Schülern kann eine Kopie der richtigen Karte ausgeteilt werden, sodass diese zur Bearbeitung der Aufgabe die Lage der Orte vorgegeben bekommen.



Erkunden A Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

E3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren aus drei Angaben (eine Seite und zwei Winkel) ein Dreieck;
- formulieren eine Vorgehensweise zur Konstruktion eines Dreiecks aus drei Angaben (eine Seite und zwei Winkel);
- üben das Konstruieren von Dreiecken;
- rechnen Maßstäbe um.

E3 Bezug

nach E2, weiter mit O1

E3 Umsetzungsvorschlag (30 min)

	Gemeinsames Lesen des Eingangstextes und der Aufgabenstellung. Klären der Informationen im Text und der Aufgabenstellung.	UG
3a)	Klären der Frage: Welche Informationen benötigt man, um das Dreieck zu zeichnen? Danach Überlegungen anstellen, wie man mit den gegebenen Größen das Dreieck zeichnen kann.	PA
3b)	Zeichnen des Dreiecks Solitude, Markgröningen und Ludwigsburg Lösungen vergleichen	EA/ PA UG
	Skizzen erstellen zu den anderen beiden Dreiecken und Vorgehen besprechen.	PA/ UG
	Vergleich der Lösungen	UG

Mögliche HA: Eine Aufgabe aus V2-V4

Intensivzugriff

E3 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Aufgabe lädt dazu ein, etwas mehr zum Kontext zu erzählen. Hier bietet es sich an, entweder als Lehrperson oder durch einzelne Schülerinnen und Schüler Hintergrundinformationen bereitzustellen.

Insgesamt stellt die Aufgabe aber gewisse Anforderungen an die Lernenden, denen man zum einen durch gemeinsame Aufgabenerschließung begegnen kann, oder aber durch Bereitstellung weiterer Informationen. So kann man bei 3a) ergänzend fragen, ob in der Tabelle weitere Informationen zu dem Dreieck im Bild vorhanden sind, z.B. die beiden Winkel an den Enden der Strecke. Alternativ kann man auch die beiden fehlenden Winkel in der Zeichnung ergänzen.

Am Ende der Aufgabe sollte man noch mal fragen, ob nach Erstellung der Zeichnungen alle Entfernungen bestimmbar sind und warum die Idee der Mathematiker so genial gewesen ist.

E3 Erwartungshorizont

Entscheidend ist es, die Idee zu gewinnen, dass eine Strecke und zwei Winkel ausreichen, um einen dritten Punkt/Ort zu finden und dass man auf dieser Grundlage alle anderen Entfernungen im Dreieck/zwischen den Orten eindeutig bestimmen kann. Diese Einsicht kann durch einen Vergleich der Schülerlösungen gestützt werden.

E3 Lernwege

Die Tabelle, der Text und die Bilder sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, die notwendigen Informationen zusammen zu bringen. Die Überlegungen in a) sollen verhindern, dass einfach drauf losgezeichnet wird, sondern dass die Lernenden für notwendige und passende Größen sensibilisiert werden.

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler beginnen, direkt zu zeichnen, so sollte zumindest im Anschluss das Vorgehen reflektiert werden.

E3 Differenzierung

Zum Beispiel: Eintragen der beiden fehlenden Winkel in den Kartenausschnitt.



Erkunden A Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

E4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erleben, dass man Landkarten schrittweise mit Dreiecken erstellen kann;
- beschreiben, warum man Größen auch mit Hilfe von maßstabsgetreuen Dreieckskonstruktionen auf Karten messen kann;
- vergleichen verschiedene Dreieckskonstruktionen.

E4 Bezug

Nach E2-E3 und Üben in V1-3, dann O2

E4 Umsetzungsvorschlag (25 min)

- | | | |
|-----|---|-------|
| 4) | Gemeinsames Nachdenken zur Bedeutung von Pias Aussage | UG |
| 4b) | Notieren der bekannten und gemessenen Größen, anschließend Vergleich | EA/PA |
| 4c) | Jede/r schreibt einen Grund auf einen Zettel, Sammeln der Zettel an der Tafel, Bewertung der Gründe | EA/UG |
| 4d) | Streitgespräch: einer argumentiert für die Winkel, der andere für die Strecken | PA |

Mögliche HA: V4

E5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren aus drei Angaben (zwei Seiten und der Winkel dazwischen) ein Dreieck;
- beschreiben, warum nicht zugängliche Größen mit Hilfe von maßstabsgetreuen Dreieckskonstruktionen gemessen werden können.

E5 Bezug

Nach E4, dann evtl. O3

E5 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|-----|---|---------|
| 5) | Zusammenhang der Skizze mit dem Bild klären, Bedeutung von Merves Aussage diskutieren | UG |
| 5a) | Bestimmen der Länge der roten Linie, dann Partnervergleich | EA/ PA |
| 5b) | Systematisches Probieren verschiedener Beispiele | GA / UG |
| 5c) | Sammeln der Fälle, welche Dreiecksgrößen gegeben sein können. Schreibgespräch zur Formulierung des allgemeinen Vorgehens. | EA/ UG |

Mögliche HA: V5, evtl. auch aus V9-V16

Intensivzugriff

E4 Umsetzungshinweise/Alternativen

Hier erfolgt die Reflektion des Vorgehens bislang im Kapitel, wobei der Blick auf der Triangulation und auf dem Unterschied von real gemessenen und in einer Zeichnung abgelesenen Größen liegt. Für beide Ideen sollte sich ausreichend Zeit genommen werden, weil sie zu den zentralen Ideen dieses Kapitels gehören.

E4 Erwartungshorizont

Alle Lernenden verstehen, dass...

- das Dreieck die zentrale Figur bei der Triangulation ist;
- maßstabsgetreue Dreieckskonstruktionen beim Messen von realen Größen helfen;
- Winkel bei realen Messvorgängen einfacher zu bestimmen sind als Streckenlängen.

E4 Lernwege

Einige Lernende können diese Fragen ohne Rückgriff auf ihre Aufgaben beantworten, die meisten brauchen aber neben eigenen Bearbeitungen auch das gemeinsame Gespräch, um die zentralen Ideen nachzuvollziehen.

E4 Differenzierung

Die langsameren Schülerinnen und Schüler können E4d) auslassen.

E5 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Dreieckskonstruktionen mit zwei Seiten und einem Winkel werden in dieser Aufgabe thematisiert. Dazu kann man in E5b) die Schülerinnen und Schüler auffordern, Skizzen zu erstellen, wo die zwei Seiten und der Winkel im Dreieck sein können, um dann mit verschiedenen Größen die Konstruktionen zu prüfen, z.B. ob man immer dasselbe Dreieck erhält.

Statt eines Schreibgesprächs in E5c) kann man die Formulierung auch im Unterrichtsgespräch finden.

E5 Erwartungshorizont

Die Bedeutung von Dreiecken zur Bestimmung von unzugänglichen Größen und das Vorgehen bei der Konstruktion mit zwei Seiten und einem Winkel sollte verstanden sein.

E5 Lernwege

Für manche Lernende stellt sich die Beziehung der beiden Bilder als Hürde. Hier hilft eine Vorstellungsübung, in beiden Bildern zugleich auf den Dreiecksseiten zu laufen.

Herausfordernd kann in c) die allgemeine Formulierung sein. Hier müssen einige Lernende mit konkreten Zahlenwerten unterstützt werden.



Erkunden B Wie viele Angaben benötige ich, um Dreiecke zu zeichnen?

Schnellzugriff

E6 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren aus verschiedenen Angaben Dreiecke;
- beurteilen, welche und wie viele Angaben für das Erstellen von (eindeutigen) Dreiecken ausreichen;
- schreiben ihre Ergebnisse systematisch auf.

E6 Bezug

Nach **E5** bzw. **O3** und ausreichend Übung im Vertiefen zu Etappe 1

E6 Vorbereitung/Material

Strecken und Winkel im Materialblock bzw. Vorbereitung des Applets am Computer

E6 Umsetzungsvorschlag (45 min)

- 6a)** Klärung der Aufgabenstellung, dazu Besprechen des Vorgehens an einem Beispiel mit dem Material am OHP UG
Danach Ausprobieren verschiedener Konstellationen PA

- 6b)** Nachlegen der Dreiecke von Pia und Till mit Material/Applet, dann gemeinsame Klärung, warum und wann zwei Dreiecke entstehen können PA

- 6c)** Nachlegen der Dreiecke von Ole und Merve mit Material/Applet, dann gemeinsame Klärung, warum und wann zwei Dreiecke entstehen können PA

- 6d)** Klärung der Aufgabenstellung, indem man bespricht, was Till in seine Tabelle eingetragen hat. UG
Eintragen der Fälle von Ole und Merve und der eigenen Fälle. GA
Danach gemeinsames Vergleichen und Ergänzen im Klassenverband. UG

Mögliche HA: O6a) oder eigenständiges Herumprobieren mit dem DGS

Intensivzugriff

E6 Umsetzungshinweise/Alternativen

Bei dieser Aufgabe sind verschiedene Varianten umsetzbar. Man kann entlang der vorgegebenen Aufgabenteile vorgehen, so dass die Lernenden ohne große Anleitung selbst Entdeckungen machen können. Man kann aber auch zuerst die Aufgabenteile **b)** und **c)** bearbeiten lassen, so dass der Fokus der Aufgabe deutlich wird. Man würde dann im Anschluss an **b)** und **c)** die Tabelle in **d)** ausfüllen und erst dann weitere Fälle suchen.

Weitere Variations-, aber auch Differenzierungsmöglichkeiten, bestehen in der Verwendung des Materials und des Applets.

E6 Erwartungshorizont

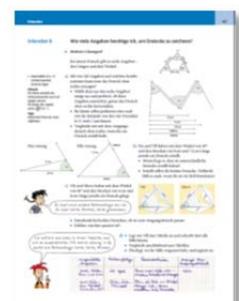
Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass bestimmte Größenangaben ausreichen, um ein Dreieck eindeutig herzustellen. Dabei liegt der Schwerpunkt nicht auf dem Konstruieren, sondern auf den notwendigen Angaben. Sie sollen auch erkennen, dass zwei Angaben nicht ausreichen und bei vier Angaben Widersprüche entstehen können. Auch wenn in Aufgabenteil **d)** eine Tabelle systematisch angelegt wird, so ist es doch nicht Ziel der Aufgabe, hier alle möglichen Fälle aufzulisten. Je nach Lerngruppe ist es aber denkbar, dass man bei der systematischen Erstellung aller Fälle schon ziemlich weit kommt.

E6 Lernwege

Bei der Erstellung der Tabelle benötigen die Lernenden in der Regel noch Unterstützung, und zwar hinsichtlich der Informationen, die in diese Tabelle eingetragen werden.

E6 Differenzierung

Ergänzend zu der Möglichkeit bei dieser Aufgabe mit den Aufgabenteilen **b)** und **c)** zu beginnen, kann man die Arbeit bei etwas schwächeren Schülerinnen und Schülern so organisieren, dass immer einer eine Figur legt und der andere diese kontrolliert und man dann gemeinsam das Ergebnis aufschreibt.



Erkunden C Wie kann ich die Mitte finden?

Schnellzugriff

E7 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren in Dreiecken den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten;
- variieren systematisch mit einem DGS;
- vertiefen ihre Problemlösefähigkeiten.

E7 Bezug

Nach **E6**, evtl. zwischendurch **O7**

E7 Vorbereitung/Material

Computer mit DGS (ideal 1 PC pro 2-3 Lernende, notfalls bei **c**) gemeinsames Explorieren im Klassenverband an einem PC), Materialblock

E7 Umsetzungsvorschlag (ca. 45 min)

7a)	kurzes Eindenen in Kontext, dann händisches Ausprobieren, wo der Standort bei vier Städten sein kann Diskussion zu den Problemen bei vier Städten, Verständigung zum weiteren Vorgehen, dann Standorte für jeweils zwei Städte suchen, dann für drei Städte	UG GA UG GA
7b)	Schreibgespräch	GA
7c)	Zu zweit, einer äußert Vermutung, was passiert, der andere probiert es aus, dann gemeinsames Aufschreiben der Ergebnisse Sammlung der Ergebnisse	PA UG
7d)	Suche nach geeigneten Kriterien	PA

Mögliche HA: V26

Intensivzugriff

E7 Umsetzungshinweise/Alternativen

Das Nutzen von Dynamischen Geometriesystemen ist zentraler Lehrplaninhalt. Sie unterstützen die strukturierte Herangehensweise an eine Problemstellung und ermöglichen durch die dynamischen Werkzeuge mehr Einsichten als das Arbeiten mit Stift und Papier. Dies kommt insbesondere bei **c**) zum Tragen. Für einen DGS-freien Zugang bei **a)** spricht, dass die Mittelsenkrechtenidee händisch entwickelt werden kann.

E7 Erwartungshorizont

In **a)** soll die Idee der Mittelsenkrechten entwickelt werden. Hier reicht es aus, wenn diese mit einem Geodreieck konstruiert wird. Daran anschließend wird die Idee genutzt, dass man für den optimalen Punkt bei drei Orten, dreimal zwei Orte betrachtet. Diese Idee lässt sich auch später bei vier Orten verwenden.

In **c)** soll neben dem Erwerb von Werkzeugkompetenz im Umgang mit dem DGS, Eigenschaften des Mittelsenkrechenschnittpunkt erkundet werden, wie z.B. das dieser nicht notwendig im Innern des Dreiecks liegen muss.

E7 Differenzierung

Für Unterausgelastete: Das Verfahren lässt sich für andere Vielecke erweitern.

Lernende, denen die Aufträge zu offen sind, kann man fokussierte Ergänzungsaufträge geben, z.B. bei **b)**:

- Untersuche besondere Dreiecke (z.B. gleichseitige Dreiecke).
- Ziehe einen Punkt möglichst nah an einen anderen Punkt oder nah an die gegenüberliegende Seite.

Lernende, die bei **a)** keine eigenen Ideen entwickeln, können erst **O7a)**-**O7d)** bearbeiten.

E7 Diagnose

Können alle Lernende angemessen mit dem DGS umgehen? Können die Lernenden systematisch probieren oder brauchen sie Unterstützung bei der Entschleunigung oder Dokumentation der Prozesse?



Erkunden C Wie kann ich die Mitte finden?

Schnellzugriff

E8 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren in Dreiecken den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden;
- variieren systematisch mit einem DGS;
- vertiefen ihre Problemlösefähigkeiten.

E8 Bezug

Nach **E7**, zwischendurch **O8**

E8 Vorbereitung/Material

Computer mit DGS, gegebenenfalls kann man für **7d)** ein dynamisches Arbeitsblatt vorbereiten, in dem man beide Punkte gut vergleichen kann.
(ideal 1 PC pro 2-3 Lernende)

E8 Umsetzungsvorschlag (ca. 45 min)

- | | | |
|------------|--|----------|
| 8a) | Kurzes Eindenken in die Aufgabenstellung, dann Bearbeitung von a) | UG
GA |
|------------|--|----------|

- | | | |
|------------|---|----------|
| 8b) | Bearbeiten der Aufgabenstellung, dann Vergleich | EA
UG |
|------------|---|----------|

- | | | |
|------------|---|----------|
| 8c) | Zu zweit, einer äußert Vermutung, was passiert, der andere probiert es aus, dann gemeinsames Aufschreiben der Ergebnisse
Sammlung der Ergebnisse | PA
UG |
|------------|---|----------|

- | | | |
|------------|---|----|
| 8d) | Gemeinsames systematisches Variieren mit dem DGS. Einer schreibt Eigenschaften des einen Punktes, der andere Eigenschaften des anderen Punktes auf, dann Vergleich und Einigung auf gemeinsame und unterschiedliche Eigenschaften | PA |
|------------|---|----|

Mögliche HA: V27

Intensivzugriff

E8 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Verwendung des DGS kommt insbesondere bei **c)** und **d)** zum Tragen. Für einen DGS-freien Zugang bei **a)** spricht, dass die Idee der Winkelhalbierenden und ihren Schnittpunkt händisch entwickelt werden kann.

E8 Erwartungshorizont

In **a)** soll die Idee der Winkelhalbierenden entwickelt werden. Hier reicht es aus, wenn diese durch das Ausmessen der Winkel hergestellt wird. Daran anschließend wird die Idee genutzt, dass man für den optimalen Punkt bei drei Straßen, dreimal zwei Straßen betrachtet.

In **c)** soll neben dem Erwerb von Werkzeugkompetenz im Umgang mit dem DGS, Eigenschaften der Winkelhalbierenden erkundet werden, wie z.B. dass dieser Punkt notwendig im Innern des Dreiecks liegen muss.

E8 Differenzierung

Für Unterausgelastete: Das Verfahren lässt sich für Vierecke erweitern.

Lernende, denen die Aufträge zu offen sind, kann man fokussierte Ergänzungsaufträge geben, z.B. bei **b)**:

- Probiere es für gleiche Winkel, sehr große oder sehr kleine Winkel

E8 Diagnose

Können alle Lernende angemessen mit dem DGS umgehen? Können die Lernenden systematisch probieren oder brauchen sie Unterstützung bei der Entschleunigung oder Dokumentation der Prozesse?



Ordnen A

Wie kann man mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

O1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren mit Hilfe einer Kreiskonstruktion aus drei Seiten ein Dreieck;
- dokumentieren ihr Vorgehen mit einer Konstruktionsbeschreibung.

O1 Bezug

Nach **E2**, weiter mit **E3**

O1 Vorbereitung/Material

Computer mit DGS, (ideal 1 PC pro 2-3 Lernende)
Methodenspeicher aus Materialblock, auch auf Folie
Wissenspeicher zu **O1** aus dem Materialblock, auch auf Folie

O1 Umsetzungsvorschlag (25 min)

1a) Aufgabenverständnis im Plenum sichern, UG
dazu eine Konstruktion (z.B. von Till) gemeinsam unter Verwendung des Methodenspeichers durchführen, ergänzend dazu Spurpunkterzeugung erklären PA
Dreiecke auf drei Wegen selbst erstellen UG
Begründung für die Genauigkeit von Oles Weg im Plenum besprechen

1bc) eigenen Lösungsweg aus **O1** aufschreiben, dann durch Konstruktion überprüfen und die Beschreibung verbessern EA/ PA

1de) Die ausgeschnittenen Bilder mit der eigenen Lösung vergleichen und den Wissenspeicher ausfüllen. EA

Mögliche HA: Aus **V1-V3**

Intensivzugriff

O1 Umsetzungshinweise

Die Erweiterung des Konstruktionsverfahrens zu sss zu den beiden systematischeren Versionen mit Spurpunkt und Kreiskonstruktion ist ein wichtiger Schritt, bei dem das DGS eine gute Vorstellungsunterstützung liefert.

Die dann folgende Konstruktionsbeschreibung nutzt vorgegebene Satzbausteine, um nicht die Hürde einer uneinheitlichen Sprache zu schaffen. Hier ist insbesondere die Kontrolle ein wichtiges Prüfmittel, um sich eingehend mit den Beschreibungen auseinanderzusetzen. Als Wissens-element wird Oles Konstruktion mitgenommen, aber die Erfahrungen zur Spurpunkt-konstruktion werden weiterhin hilfreich sein.

Impulse zum Vergleich in **O1a)**:

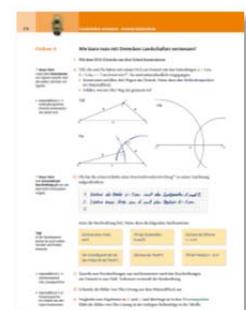
- Was ist bei allen drei Wegen gleich?
- Kann man die Spurpunkte in Tills und Oles Bild auch sehen?

O1 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher

O1 Differenzierung

Schwächeren Lernenden kann man auch die vorformulierten Karten geben, die sie dann in die richtige Reihenfolge bringen sollen, oder die noch kleine zu korrigierende Fehler enthalten.



Ordnen A Wie kann man mit Dreiecken Landschaften vermessen?

Schnellzugriff

O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- können beschreiben, warum man auf einer Karte reale Größen ausmessen kann;
- nutzen das PADEK-Schema, um Dreiecke zu konstruieren.

O2 Bezug

Nach E4 oder E5, dann direkt O3

O2 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus Materialblock, auch auf Folie

O2 Umsetzungsvorschlag (20 min)

2ab) Aufgabenverständnis im Plenum sichern, UG/PA dann PA zur Bestimmung der Breite des Flusses und Beschreibung des Vorgehens Sammlung der Einschätzungen zu Oles Aussage

2c) Identifikation der PADEK-Schritte EA

2d) Eintragen in Wissenspeicher PA/EA

O3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erweitern ihre prozessbezogene Kompetenz Modellieren;
- nutzen das PADEK-Schema als strukturierte Vorgehensweise zur Modellierung;
- werden sich bewusst, dass nach dem Kontrollieren das Revidieren von Ansätzen für Modellierungen wichtig ist und PADEK so zum Kreislauf wird.

O3 Bezug

Nach O2, dann evtl. E5

O3 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus Materialblock, auch auf Folie

O3 Umsetzungsvorschlag (25 min)

3a) Regeln erst in EA formulieren, dann in PA vergleichen EA/PA

3b) Konstruktion erst in EA durchführen, dann in PA überprüfen EA/PA

3c) Gemeinsames Unterrichtsgespräch mit kurzer Phase des Ausprobierens von Winkelgrößen bei der Gleichseitigkeit UG/EA

3d) Der Wissenspeicher kann nach den jeweiligen Teilaufgaben auch schon ausgefüllt werden EA

Mögliche HA: Aus V7 oder V8, evtl. auch V9-V16

Intensivzugriff O2 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Nutzung von PADEK zur Durchführung von Dreieckskonstruktionen und die Formulierung der Idee, dass das maßstabgetreue Zeichnen auf Karten, Messungen ermöglicht, sind zwei zentrale Schritte in diesem Kapitel. Alternativ kann man das Schema auf dem Wissenspeicher direkt von Beginn an zur Verfügung stellen (z.B. als Kopie), und entlang dieser Strukturierung die Aufgabe bearbeiten.

O2 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher

O3 Umsetzungshinweise

Die in dieser Aufgabe zur Verfügung gestellten Satzbausteine sind auch bei weiteren Konstruktionsbeschreibungen nutzbar. Das sollte an dieser Stelle schon Erwähnung finden.

Zentral an dieser Aufgabe ist die Bereitstellung einer Konstruktionsbeschreibung. Alle anderen Beschreibungen werden später in einer Tabelle gesammelt.

Gegebenenfalls kann der Aufgabenteil a) nur kurz besprochen werden, ohne weitere Bearbeitung. Auch ist es denkbar, an dieser Stelle auf die Thematisierung von gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecken zu verzichten.

O3 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher



Ordnen B

Wie viele Angaben benötigt man, um Dreiecke zu zeichnen?

Schnellzugriff

O4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erkennen, wenn Dreiecke kongruent sind und können dies erklären.

O4 Bezug

nach E6, weiter mit O6

O4 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus dem Materialblock auf Folie
Arbeitsmaterial aus dem Materialblock

O4 Umsetzungsvorschlag (15 min)

4) Klärung der Zielrichtung der Aufgabe UG

4ab) Ich-Du-Wir: erst alleine ausprobieren, dann zu zweit Oles Aussage besprechen und aufschreiben, welche Fälle auftreten können, zum Schluss im Plenum die Fälle vorstellen und diskutieren. EA PA UG

4c) nach Vergleich an Folie in WS eintragen UG EA

Mögliche HA: V8 oder V20

O5 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- nutzen ein DGS, um Dreiecke zu konstruieren.

O5 Bezug

Vor oder während E6, weiter mit O6

O5 Vorbereitung/Material

Computer mit DGS, (ideal 1 PC pro 2-3 Lernende)
Methodenspeicher aus Materialblock, auch auf Folie

O5 Umsetzungsvorschlag (30 min)

5) Instruktion hinsichtlich der Verwendung des Methodenspeichers UG

5abcd) Es wird abwechselnd am Rechner gearbeitet, einer konstruiert, die anderen helfen und kontrollieren. Zum Schluss sollten die wichtigsten Erkenntnisse im Plenum zusammengefasst werden. EA PA UG

Mögliche HA: Hier geht es weiter mit E6 oder man wählt eine Aufgabe aus Vertiefen unter Verwendung des DGS

Intensivzugriff

O4 Umsetzungshinweise/Alternativen

Diese Aufgabe kann im Anschluss an E6 als Reflektion der Erkundungsprozesse genutzt werden. Man kann sie aber auch vor E6 einsetzen, um die Begriffe sprachlich anzubahnen. Es bietet sich aber die vorgeschlagene Reihenfolge an, um das Erkunden E6 nicht zu belasten.

Mit dieser Aufgabe wird zudem ein Kongruenzbegriff zur Verfügung gestellt, der das in den Erkunden-Aufgaben genutzte Verständnis von Kongruenz im Sinne von Konstruktionsgleich komplettiert.

O4 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher

O5 Umsetzungshinweise/Alternativen

Wenn man in E6 das DGS nutzen möchte, kann diese Aufgabe vor E6 als Vorbereitung oder während dessen zum Erwerb der Werkzeugkompetenz bearbeitet werden.

O5 Differenzierung

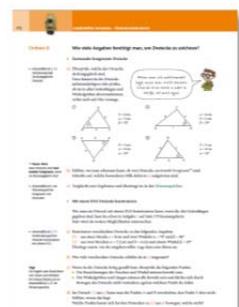
Da vermutlich einige technische Fragen gestellt werden, zu denen man im Methodenspeicher nicht immer direkt die richtige Antwort findet, bietet es sich an, Schülerinnen und Schüler als Tutoren einzusetzen, die bei den entsprechenden Fragen helfen können.

O5 Diagnose

Können die Lernenden die passende Befehle im DGS auswählen, erkennen sie den Zusammenhang mit den Aktivitäten, die sie jeweils händisch ausführen würden?

O5 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher



Ordnen B

Wie Angaben benötigt man, um Dreiecke zu zeichnen?

Schnellzugriff

O6 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- können aus verschiedenen Angaben Dreiecke konstruieren;
- können mit Beispielen begründen, wie viele und welche Angaben ausreichen, um kongruente Dreiecke zu erzeugen.

O6 Bezug

nach E6, dann V17-V19

O6 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus dem Materialblock auf Folie

O6 Umsetzungsvorschlag (45 min)

- 6ab) Gemeinsame Sammlung und Auswahl UG
geeigneter Beispiele
Zuordnung der Namen zu den Bildern

- 6c) Lernende konstruieren und vergleichen EA
ihre Dreiecke.
Erklären, warum unterschiedliche Dreiecke UG
entstehen.

- 6de) Jede/r in der Gruppe bearbeitet eine GA
Situation, anschließend werden die Ergebnisse im Schreibgespräch überprüft und verbessert
Präsentation im Museumsgang mit dem UG
Auftrag, Unterschiede zwischen den Postern zu finden
Gemeinsame Diskussion über die Gründe für die Unterschiede
Verbesserung der eigenen Poster

- 6f) Bearbeiten als Ich-Du-Wir EA/ PA/
UG

Mögliche HA: Eintrag in den Wissenspeicher oder Aufgaben aus V17-V19

Intensivzugriff

O6 Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Aufgabe knüpft an E6 an und systematisiert die dort gewonnenen Erkenntnisse. Je nachdem, wie weit in E6 die Erarbeitung vorangeschritten ist, muss man diese Aufgabe nicht vollständig bearbeiten und kann vielleicht sogar die in E6 entstandenen Tabellen nutzen. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Typen und deren Ausnahmen kennen und auch an Beispielen beschreiben können, warum zwei oder vier Angaben zu Schwierigkeiten führen können.

Im Anschluss an diese Kernaufgabe sollten hinreichend viele Übegelegenheiten aus V17-V22 angeboten werden.

O6 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllter Wissenspeicher

O6 Lernwege

Je nach Ausgangslage bei E6 sind hier unterschiedliche Voraussetzungen und damit unterschiedliche Bearbeitungen denkbar. Gute Schülerinnen und Schüler können hier selbst erarbeiten, für die schwächeren Schülerinnen und Schüler soll die Orientierung an der Tabelle helfen.



Ordnen C

Wie kann man die Mitte finden?

Schnellzugriff

07 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren Mittelsenkrechten und Umkreismittelpunkt im Dreieck.

07 Bezug

Knüpft unmittelbar an **E7** an, kann auch parallel zu **E7** genutzt werden

07 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus dem Materialblock

07 Umsetzungsvorschlag (45 min)

7abc) Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich nacheinander die Teilaufgaben mit der Methode **Ich-Du-Wir**. EA/PA

7cd) Diskussion im Plenum über die beiden Wege, eine Mittelsenkrechte zu konstruieren. UG

7ef) **Ich-Du-Wir**
Der Zusammenhang von Umkreis und Mittelsenkrechenschnittpunkt sollte im Rahmen der Diskussion entstehen, sonst sollte er im Plenum angesprochen werden. EA/PA/UG

7g) Übertragen in WS EA

Mögliche HA: V23

Intensivzugriff

07 Umsetzungshinweise/Alternativen

Diese Aufgabe sichert, was in **E7** bereits erarbeitet wurde. Neu sind die sprachliche Darstellung und die Reihenfolge hinsichtlich der zu untersuchenden Punkteanzahlen.

Im Wissenspeicher ist die Reihenfolge wie im Ordnen, jedoch ist die Aufmerksamkeit auf zwei und drei Punkte reduziert.

Eine wichtige Frage für den Unterricht wird sein, mit welcher Konstruktion man langfristig weiterarbeiten möchte. Die Sinnhaftigkeit für die aufwändigere Zirkelkonstruktion ist angelegt, den Schülerinnen und Schülern steht meist die Konstruktion mit Geodreieck näher. Hier muss rechtzeitig eine Entscheidung seitens der Lehrperson getroffen werden. Der Aufbau des Wissensspeichers lässt beides zu.

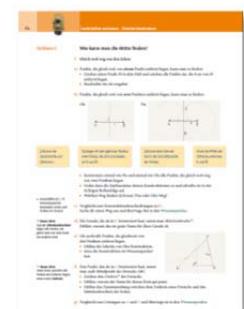
07 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllte Wissenspeicherseite.

07 Lernwege/Differenzierung

Die direkte Gegenüberstellung von zwei Wegen zur Konstruktion macht den Lernenden deutlich, dass eine Frage/Aufgabe auf unterschiedlichen Wegen gelöst werden kann. Strukturell unterscheiden sich die Wege jedoch. Während für die Kreiskonstruktion ein exemplarischer Kreis ausgewählt wird und der Fokus auf dem Abstand von den beiden Streckenendpunkten liegt, wird bei der Konstruktion mit dem Geodreieck die Perspektive von der Streckenmitte aus gedacht:

- man hat zuerst den Punkt auf der Strecke, der gleichweit weg ist von den Endpunkten,
- sucht sich dann weitere Punkte, die ebenfalls gleichweitweg von den Endpunkten und deswegen auf einer Geraden liegen, die rechtwinklig zur Strecke verläuft. Mit leistungsstarken Schülerinnen und Schülern kann man den Unterschied diskutieren. Aber auch wenn der Unterschied nicht explizit thematisiert wird, kann es sein, dass Verständnisschwierigkeiten für die eine oder andere Konstruktion dadurch entstehen, dass eine nicht passende Perspektive eingenommen wird.



Ordnen C

Wie kann man die Mitte finden?

Schnellzugriff

O8 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- konstruieren Winkelhalbierende und Umkreismittelpunkt im Dreieck.

O8 Bezug

Knüpft unmittelbar an E8 an, kann auch parallel zu E8 genutzt werden

O8 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher aus dem Materialblock

Computer mit DGS, (ideal 1 PC pro 2-3 Lernende)

O8 Umsetzungsvorschlag (45 min)

8a)	Anforderungen an die Punkte auf der Winkelhalbierenden thematisieren	UG
8b)	Gemeinsame Arbeit mit dem DGS, erst nach der Idee von Till, dann auf einem neuen Arbeitsblatt nach der Idee von Merve	PA
8cd)	Schreibgespräch mit anschließender gemeinsamer Diskussion, warum der Name Winkelhalbierende gut passt	GA
8ef)	Ich-Du-Wir Der Zusammenhang von Innkreis und Winkelhalbierendenschnittpunkt sollte im Rahmen der Diskussion entstehen, sonst sollte er im Plenum angesprochen werden	EA/PA/ UG
8g)	Übertragen in WS	EA

Mögliche HA: V24

Intensivzugriff

O8 Umsetzungshinweise/Alternativen

Diese Aufgabe sichert, was in E8 bereits erarbeitet wurde. Da der Begriff der Winkelhalbierenden sehr anspruchsvoll ist, wenn man sich von der punktwisen Mittelsenkrechtenkonstruktion nähert, bietet es sich an, bei 8b) Unterstützungsangebote zu geben: Statt auf die beiden Geraden zu schauen, betrachtet man Punkte auf den Geraden, zu denen man gleichweit entfernte Punkte sucht (hier kommt die Mittelsenkrechte ins Spiel) und diese Punkte müssen zusätzlich gleichweit entfernt vom Geradenschnittpunkt liegen. All dies ist in der Konstruktion von Till enthalten. Ein Unterstützungsangebot wäre die gemeinsame Konstruktion oder alternativ ein Konstruktionsleitfaden.

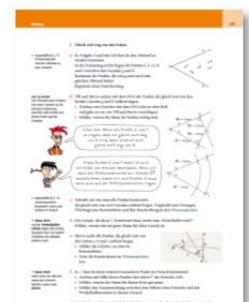
Eine wichtige Frage für den Unterricht wird – ebenso wie bei der Mittelsenkrechten – sein, mit welcher Konstruktion man langfristig weiterarbeiten möchte. Die Sinnhaftigkeit für die aufwändigere Zirkelkonstruktion ist angelegt (auch durch den Kontext in E8, wo ein spezifischer Ort und nicht eine Gerade gesucht ist), den Schülerinnen und Schülern steht meist die Konstruktion über die Winkelteilung näher. Hier muss rechtzeitig eine Entscheidung seitens der Lehrperson getroffen werden. Der Aufbau des Wissensspeichers lässt beides zu.

O8 Erwartungshorizont

Siehe ausgefüllte Wissenspeicherseite.

O8 Lernwege/Differenzierung

Auch die Wege zur Konstruktion der Winkelhalbierenden unterscheiden sich strukturell deutlich. Während für die Kreiskonstruktion ein exemplarischer Kreis ausgewählt wird und der Fokus auf dem Abstand eines zu konstruierenden Punktes von zwei Punkten auf den beiden Geraden liegt, wird bei der Konstruktion mit dem Geodreieck die Perspektive vom Winkel bzw. von der Beziehung der drei Geraden zueinander gedacht. Mit leistungsstarken Schülerinnen und Schülern kann man den Unterschied diskutieren. Aber auch wenn der Unterschied nicht explizit thematisiert wird, kann es sein, dass Verständnisschwierigkeiten für die eine oder andere Konstruktion dadurch entstehen, dass eine nicht passende Perspektive eingenommen wird, insbesondere die Perspektive auf Punktabstände, wenn man doch eine Gerade sucht, die von zwei anderen Geraden gleichweit entfernt liegt, nicht leicht zu verstehen ist.



Vertiefen 1 Mit Dreiecken auf Papier die Welt vermessen

<i>Hintergrund</i>	In V1 wird die in E1 entwickelte Idee vertieft geübt. In den sich anschließenden Aufgaben V2-V5 sollen aus Winkel- und Längenangaben Karten entwickelt werden. Dabei werden in V5 beide Modelle vergleichend gegenübergestellt. Die Idee der Triangulation wird in V6 thematisiert.
--------------------	--

Vertiefen 2 Dreiecke konstruieren und beschreiben

<i>Hintergrund</i>	Schwerpunkt der zweiten Etappe zum Vertiefen ist das Beschreiben von Konstruktionen. In V7 werden dazu Dreiecke konstruiert und auf Kongruenz überprüft, ohne dass es hier schon Kongruenz genannt wird. In V8 wird erst nach einer Konstruktionsbeschreibung eine Konstruktion erstellt und dann mit einer von einem DGS erzeugten Anleitung verglichen.
--------------------	---

Vertiefen 3 Unbekannte Größen bestimmen

<i>Hintergrund</i>	Der verbindende Zusammenhang von V9-V16 ist die Zielperspektive, in realen Situationen unbekannte Größen zu bestimmen, die zum Teil unzugänglich sind und daher die Messung einer maßstabsgetreuen Zeichnung erfordern. Kontextuell am interessantesten und als kleine umfassendere Aufgabe oder Gruppenarbeit gestaltbar ist V12 .
--------------------	---

Vertiefen 4 Dreiecke konstruieren mit unterschiedlichen Angaben

<i>Hintergrund</i>	Wie viele und welche Angaben für eindeutige Dreieckskonstruktionen benötigt werden, steht im Mittelpunkt der Aufgaben dieser Vertiefenstufe. Dabei kann das DGS alternativ genutzt werden.
--------------------	--

Vertiefen 5 Besondere Punkte und Linien im Dreieck

<i>Hintergrund</i>	Neben den im Erkunden und Ordnen kennengelernten Konzepten, die in dieser Etappe vertieft werden, kann man weitere besondere Punkte und Linien kennenlernen. Dabei sind V26 und V27 Vertiefungen zu den Erkundenaufgaben E7 und E8 . In V23 bis V25 finden sich einfache Konstruktionsaufgaben zu Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende, aber auch zu anderen besonderen Linien im Dreieck. In V25 und V29 arbeitet man mit dem Begriff der Höhe und ihren Spezifika.
--------------------	--

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- strukturieren eigene Problemlösungen nach spezifischen Schritten,
- begreifen PADEK als Möglichkeit, eine Geometrieaufgabe zu strukturieren.

PADEK wird hier genutzt, um bekannte und unbekannte Größen zu identifizieren, die Bedeutung einer Skizze herauszustellen, um dann den richtigen Ansatz in Form eines Kongruenzsatzes auszuwählen.

- erweitern ihre Werkzeugkompetenz im Umgang mit einem Dynamischen Geometriesystem.

DGS wird explizit in **E6, E7, E8, O1, O5** eingeführt bzw. genutzt. Seine Nutzung unterstützt gleichzeitig zentral den Aufbau des Verständnisses der Kongruenzsätze.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- planen, dokumentieren und diskutieren, wie Größen mit Hilfe von Karten erfasst und gemessen werden können.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Sprechen und Schreiben: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende (z.T. dauerhaft) aktiv nutzen können (zum Teil aus alten Kapiteln):

- ich skizziere
- ich konstruiere ein Dreieck (aus drei Seiten, aus zwei Seiten und einem Winkel)
- ich zeichne die Strecke mit den Endpunkten A und B
- ich zeichne einen Kreis um A (mit Radius 3 cm)
- ich markiere den Schnittpunkt den beiden Geraden
- die Geraden schneiden sich im Punkt P
- ich zeichne einen Strahl von A aus in Richtung...
- ich trage den Winkel 54° am Punkt B ab
- ich verbinde die Punkte A, B durch die Strecke s
- die kürzere der beiden Seite liegt dem Winkel gegenüber
- die Länge der Seite, die Größe des Winkels
- die Dreiecke sind zueinander kongruent
- Maßstab einer Zeichnung, maßstabsgetreu
- der Mittelpunkt des Umkreises/ des Inkreises
- ein Punkt liegt auf der Mittelsenkrechten/ Winkelhalbierenden
- gleichschenkelig, gleichseitig
- dynamisches Geometriesystem (DGS)

Lesen und Zuhören: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende in ihrer Bedeutung erfassen, aber nicht unbedingt selbst nutzen können:

- sie schlagen mit dem Zirkel einen Kreis um M
- sie tragen den Winkel 54° an der Strecke c im Punkt B ab
- sie erstellen eine Skizze, eine Karte, eine Konstruktionsbeschreibung
- sie bestimmen die Entfernung zu.../ von ... nach .../ zwischen ... und ...
- die Summe von zwei Winkelgrößen
- ein Punkt ist gleich weit von drei anderen entfernt
- freie Punkte im DGS
- sie zeichnen mit dem Computer eine Spur

Überprüfung

Als **alternative Leistungsüberprüfung** sind Lernberichte denkbar, in denen die Lernenden entlang der Checkliste ohne Zeitdruck an selbst gewählten (je einem für sie leichten und einem für sie schweren) Aufgabenbeispielen zeigen, dass sie diese Kompetenzen erworben haben.

Als **ergänzende Leistungsüberprüfung** können kleine Computerprojekte mit DGS durchgeführt werden, die den Kontext der Landvermessung weiter ausloten.

Ausgehend von einer Vertiefenaufgabe, bei der ein DGS genutzt werden kann (z.B. **V5, V12**), können mit selbst recherchierten Daten mathematische Aufgabenstellungen formuliert und unter Verwendung des DGS gelöst werden (z.B. Karten erstellt werden).

Zusammen mit einer kleinen schriftlichen Dokumentation kann das Thema der Landvermessung und Triangulation erarbeitet und vorgestellt werden. Bewertet werden kann neben der Darstellungsqualität und der mathematischen und technischen Richtigkeit auch die Relevanz und mathematische Tiefe der Fragestellung.



Checkliste

Landschaften vermessen –
Dreiecke konstruieren

Ich kann ... Ich kenne ...	Hier kann ich üben ...
K1 Ich kann aus drei Seitenlängen mit und ohne DGS Dreiecke konstruieren. Konstruiere das folgende Dreieck mit und ohne DGS: $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 4,2 \text{ cm}$	S. 152 Nr. 1–3 S. 153 Nr. 5, 6
K2 Ich kann aus Seitenlängen und Winkeln mit und ohne DGS Dreiecke konstruieren. Konstruiere mit zwei verschiedene Dreiecke mit und ohne DGS: zwei Winkel mit 40° und 25° , eine Seite von 5 cm Länge	S. 152 Nr. 4–6 S. 154 Nr. 7, 8
K3 Ich kann eine Konstruktionsbeschreibung so erstellen, dass sie nachvollziehbar und übersichtlich ist. Benenne die wichtigsten Punkte, die eine Konstruktionsbeschreibung enthalten sollte.	S. 154 Nr. 7, 8
K4 Ich kann beschreiben, wie man mit Hilfe von Dreiecken Seitenlängen und Winkelgrößen bestimmt, auch wenn man einige Größen nicht direkt messen kann. Ich kann beschreiben, wie man die Höhe eines Hauses bestimmt.	S. 155 Nr. 9–11 S. 156 Nr. 12–13 S. 157 Nr. 14–16
K5 Ich kann erkennen, mit welchen Angaben sich ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt, und kann das Dreieck dann auch konstruieren. Entscheide und erkläre, mit welchen der folgenden Angaben sich ein eindeutiges Dreieck konstruieren lässt. (1) $\alpha = 35^\circ$; $\beta = 127^\circ$ (2) $c = 2,3 \text{ cm}$; $\beta = 67^\circ$; $a = 6,5 \text{ cm}$ (3) $a = 5 \text{ cm}$; $b = 3 \text{ cm}$; $c = 9,2 \text{ cm}$ (4) $\alpha = 44^\circ$; $b = 3 \text{ cm}$; $c = 2,5 \text{ cm}$	S. 158 Nr. 17–19 S. 159 Nr. 20–22
K6 Ich kenne besondere Linien wie die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende und kann sie konstruieren. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Erkläre, welche besonderen Eigenschaften die Punkte auf einer Winkelhalbierenden besitzen. ▪ Zeichne eine Strecke und konstruiere die Mittelsenkrechte. 	S. 160 Nr. 23, 24 S. 161 Nr. 26, 27 S. 162 Nr. 28
K7 Ich kenne die verschiedenen Mittelpunkte im Dreieck und kann sie konstruieren. Zeichne ein Dreieck und konstruiere Inkreis- und Umkreismittelpunkt.	S. 160 Nr. 25 S. 162 Nr. 28, 29 S. 163 Nr. 30, 32

► *Hinweis:* Im Materialblock auf Seite 70 findest du diese Checkliste für deine Selbsteinschätzung. Zusätzliche Übungsaufgaben findest du im Internet unter  164-1. (www.cornelsen.de/mathewerkstatt, Buchkennung: MWS040 018, Mediencode: 164-1)

Basiskompetenzen, die in der Übe-Kartei für das spätere Vertiefen aufgegriffen werden:

- K5** Ich kann erkennen, mit welchen Angaben sich ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt, und kann das Dreieck dann auch konstruieren.
- K6** Ich kenne besondere Linien wie die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende und kann sie konstruieren.

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**:
<http://www.ko-si-ma.de> → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 7,
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040018):
www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 7 oder mathewerkstatt 3.

	Dreiecke 1	Bild der Einstiegsseite (SB KOSIMA)
	Dreiecke 2	Wissenspeicher <i>Maßstab 2</i> (SB E1 MB Kl. 6)
	Dreiecke 3	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Maßstab 2</i> (SB E1 KOSIMA)
	Dreiecke 4	Arbeitsmaterial <i>Dreiecke legen</i> (SB E6 MB)
	Dreiecke 5	Applet <i>Dreiecke legen</i> (SB E6 CORNELSEN, Mediencode: 143-1)
	Dreiecke 6	Arbeitsmaterial <i>Gleich weit weg von den Städten</i> (SB E7 MB)
	Dreiecke 7	Arbeitsmaterial <i>Gleich weit weg von den Straßen</i> (SB E8 MB)
	Dreiecke 8	Methodenspeicher <i>Hilfsmittel 3</i> (SB O1 MB)
	Dreiecke 9	Arbeitsmaterial <i>Oles Lösungsschritte</i> (SB O1 MB)
	Dreiecke 10	Wissenspeicher <i>Figuren 2</i> (SB O1 MB)
	Dreiecke 11	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 2</i> (SB O1 KOSIMA)
	Dreiecke 12	Wissenspeicher <i>Figuren 3</i> (SB O2 MB)
	Dreiecke 13	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 3</i> (SB O2 KOSIMA)
	Dreiecke 14	Wissenspeicher <i>Figuren 4</i> (SB O3 MB)
	Dreiecke 15	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 4</i> (SB O3 KOSIMA)
	Dreiecke 16	Arbeitsmaterial <i>Deckungsgleiche Dreiecke</i> (SB O4 MB)
	Dreiecke 17	Wissenspeicher <i>Figuren 5</i> (SB O4 MB)
	Dreiecke 18	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 5</i> (SB O4 KOSIMA)
	Dreiecke 19	Methodenspeicher <i>Hilfsmittel 3</i> (SB O5 MB)
	Dreiecke 20	Wissenspeicher <i>Figuren 6</i> (SB O6 MB)
	Dreiecke 21	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 6</i> (SB O6 KOSIMA)
	Dreiecke 22	Wissenspeicher <i>Figuren 7</i> (SB O7/O8 MB)
	Dreiecke 23	Ausgefüllter Wissenspeicher <i>Figuren 7</i> (SB O7/O8 KOSIMA)
Dreiecke 24	Arbeitsmaterial <i>Gleicher Abstand zu zwei Geraden</i> (SB O8 MB)	
	Dreiecke 25	Arbeitsmaterial <i>Karten übertragen</i> (SB V5 MB)
	Dreiecke 26	Arbeitsmaterial <i>Entfernungen bestimmen</i> (SB V12 MB)
	Dreiecke 27	DGS-Datei <i>Entfernungen zu Ecken</i> (SB V32 CORNELSEN, Mediencode: 163-1)
	Dreiecke 28	Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 164-1)
	Dreiecke 29	Checkliste zum Ausfüllen (SB MB & CORNELSEN)