Vanessa RICHTER, Dortmund

‚Ich hab den Unterschied berechnet' – Einblicke in eine Lernprozessstudie zur Begriffsbildung zu linearen Funktionen

Der Begriff der Linearen Funktion bildet einen zentralen Anker für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. Auch für komplexere Konzepte (z.B. in der Analysis) sind tragfähige Vorstellungen zu gleichbleibenden Wachstumsprozessen unabdingbar. Tragfähigkeit bezieht sich sowohl auf die Fähigkeit Funktionen statisch und dynamisch zu betrachten – aus normativer Perspektive die Grundvorstellungen der Zuordnung, Kovariation und der Funktion als Ganzes zu aktivieren (vgl. Vollrath 1989), als auch mit Funktionen in unterschiedlichen Darstellungsformen (numerisch, graphisch, symbolisch, verbal) zu arbeiten und zwischen diesen zu wechseln (vgl. Duval 2006). Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Beschreibung von Teilen typischer Lernverläufe samt Hürden unter den Bedingungen eines kontextgebundenen und darstellungsreichen Designs.

1. Spezifiziertes Forschungsinteresse und methodologischer Zugang

Viele Lernende nutzen ihre Vorstellungen zu gleichbleibendem Wachstum nicht adäquat. Häufig wird Proportionalität auf nicht-lineare Problemstellungen angewendet: ‚overuse of linearity' (vgl. u.a. Van Dooren/Greer 2010). Andererseits haben Lernende vielfach Schwierigkeiten Linearität zu erfassen, z.B. funktionale Zusammenhänge dynamisch zu betrachten (vgl. Tall 1992). Bestehende Studien zeigen dies zumeist an Lernständen auf. Differenzierte Erkenntnisse über Entwicklungen in Lernprozessen gibt es nur wenig. Daher setzt sich diese Studie zum Ziel, Prozesse der Begriffsbildung zu linearen Funktionen zu begleiten, Fragen nach Lernverläufen, möglichen Hürden, sowie Bedingungen und Wirkungen ausgewählter Design-Prinzipien nachzugehen.

Das Vorhaben wird im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung realisiert (vgl. Prediger et al. 2012). Der Zugang konzentriert sich zuvorderst auf das Verstehen von Lernprozessen zu einem konkreten Lerngegenstand. Durch produktive Verknüpfung von Forschung und Entwicklung entstehen lokale gegenstandsgebundene Theorien des Lehrens und Lernens (Forschungsprodukt) und ein Prototyp eines Lehr-Lernarrangements zum Begriff der linearen Funktion (Entwicklungsprodukt).

2. Methodische Umsetzung

In drei Zyklen von Designexperimenten (vgl. Prediger et al. 2012) wurden Daten in Form halbstandardisierter Leitfadeninterviews erhoben. Der Kern der Design-Experimente gründete auf einem Lehr-Lernarrangement (vgl. Hußmann et al. 2015) aus dem Projekt KOSIMA (vgl. Prediger/Hußmann et al. 2012). Davon wurden verschiedene Aspekte mit Hilfe der Design-Experimente ausdifferenziert und weiterentwickelt.

Zentral für Design und Lehr-Lernarrangement ist die Einbettung in den Kontext der Routenplanung und die Orientierung entlang der Kernidee ‚Vorhersagbarkeit und Berechenbarkeit unbekannter Werte in gleichbleibenden Wachstumsprozessen'. Diese Prinzipien sind leitend für die Design-Entwicklung und werden durch weitere ergänzt. Im Folgenden werden Erkenntnisse zu dem spezifizierten Design-Prinzip ‚Durchschnittsgeschwindigkeit als gleichbleibendes Wachstum nutzen' angeführt.

Zyklus	*Forschungsfokus*	*Entwicklungsfokus*	*Design-Experiment*	*Stichprobe*
1	Ausschärfung des Forschungsinteresses	Entwicklung Kernidee / Sinnstiftung Kontext der Routenplanung	2 Partner-Interviews	1 Gesamtschule (NRW) Jgst. 7 (n=4)
2	Beforschung von Vorerfahrungen zum Begriff ‚lineare Funktion'	Strukturierung des Designs/Optimierung Aufgabenformulierungen	5 Partner-interviews	2 Gymnasien (NRW) Jgst. 7 (n=6); Jgst. 8 (n=4)
3	Beforschung von Lernprozessen	Diagnose und Förderung mit Hilfe spezifischer Aufgaben	6 x Serie von 4-5 Partnerinterviews	2 Gesamtschulen (NRW) Jgst. 8 (n=12)

Die erstellten Transkripte wurden sequenzanalytisch ausgewertet und in Sinn- und Analyseeinheiten strukturiert. Um Begriffsbildungsprozesse detailliert zu analysieren, wird ein sprachphilosophischer Zugang gewählt, der den Gebrauch von Begriffen in Begründungszusammenhängen fokussiert (vgl. Hußmann/Schacht 2009; Schacht 2012). In lokaltheoretischer Perspektive wird dies an den Ansatz der operationalen Invarianten für eine Klasse von Situationen (vgl. Vergnaud 1996) angebunden. Werkzeuge der Analyse sind ‚Festlegungen bzw. Urteile' (Behauptungen in propositionaler Form, die das Individuum für wahr hält – vgl. Hußmann 2013, Schacht 2012) und ‚Fokussierungen' (Hußmann 2013, aktivierte Konzepte und Kategorien, die ein Individuum zur Bewältigung einer Situation nutzt).

3. Auszug eines möglichen Lernverlaufes und exemplarische Identifizierung einer konzeptuellen Hürde

Fallbeispiel Niklas

Niklas bearbeitet eine Aufgabe, bei der er ausgehend von einer numerischen Darstellung und Annahme eines gleichbleibenden Wachstums im Kontext der Routenplanung weitere Zwischenwerte bestimmen soll.

N	Ich glaub bei 0 kommt 30 hin.
I	Wie hast du das denn jetzt gemacht?
N	Wenn man 300 durch 2 rechnet, kommt da 150 raus und da steht aber 180 ((zeigt auf die 2.Zeile der Tabelle)), also müssen 30 vorher drauf gewesen sein.

Zeit (in h)	Strecke (in km)
0	~~30~~ 60
1	180
2	300
3	~~480~~ ~~480~~ 420
5	~~750~~ ~~[illegible]~~ 660
10	~~4500~~ ~~[illegible]~~ 1320
20 2640	~~3000~~

Ausgangspunkt der Überlegungen von Niklas in dieser Situation ist die Fokussierung ‚zeilenweise Abhängigkeit‘ (Er nutzt das Argument 2 und den zugehörigen Funktionswert 300, um die gefahrenen Kilometer für eine Stunde zu bestimmen). Leitend ist die Fokussierung ‚Orientierung an Eins‘, die er aktiviert, um auf weitere Werte zu schließen. Auf Basis dieser Fokussierungen legt er sich fest auf: „In einer Stunde werden 150 km gefahren“. Mit diesen Fokussierungen gelingt es ihm nicht das richtige Wachstum von 120 km/h zu bestimmen. Im weiteren Verlauf des Interviews ändert er seine Strategien von (1) Proportionales Hochrechnen mit Faktor 150 zu (2) Proportionales Hochrechnen mit Faktor 150 und Addition von 30. Die Fokussierung ‚zeilenweise Abhängigkeit‘ ist dabei stets leitend.

In der folgenden Situation des gleichen Interviews, bei der die noch zu fahrende Reststrecke gesucht wird, lässt sich eine Verschiebung seiner Fokussierung beobachten.

N	O k a y .. Also ich habe 650 minus 410 gerechnet, da kommt ((rechnet das Ergebnis mit dem Taschenrechner aus)) 240 raus. Das ist dann für 2 Stunden gefahren. Hab ich geteilt durch 2 für eine Stunde, das ergibt () das ergibt 120. Dann hab ich 650 minus 120, ergibt 530 ((zeigt auf den entsprechenden Wert in der Tabelle)). 530 minus 120 das is ja wieder ne Stunde also 410. Dann die Hälfte von 120 is 60. 410 minus 60 ergibt 350 und immer so weiter.

Zeit (in h)	Strecke (in km)
0	650
1	530
2	410
2,5	~~470~~ 350

Der Fokus ‚Orientierung an Eins‘ wird fortgeführt, aber zusätzlich eine neue Perspektive ergänzt: ‚Zeilenübergreifende Abhängigkeit‘. In der Situation des negativen gleichmäßigen Wachstums nutzt Niklas die lokale Veränderung zwischen zwei Funktionswerten, um das Wachstum zu bestimmen. Die Betrachtung dieser Veränderung führt zur Bestimmung des richtigen Wachstums. Auf Nachfrage ist ihm zunächst nicht bewusst, dass er sein Vorgehen geändert hat: „Das hab ich doch eigentlich auch so gemacht. Ich hab den Unterschied berechnet“. Mit Blick auf beide Tabellen erkennt er schließlich doch seine unterschiedlichen Vorgehensweisen und er überträgt die Fokussierung der ‚Zeilenübergreifenden Abhängigkeit' auf die Tabelle mit positivem Wachstum und erhält auf diese Weise den (richtigen) festen Faktor von 120 km/h.

4. Konsequenzen für das Design

Die Tendenz in numerischen Darstellungen linearer Situationen proportionale Rechenstrategien anzuwenden, lässt sich bei weiteren Lernenden beobachten. Dies scheint eine konzeptuelle Hürde zu sein, worauf bestehende Forschungsbefunde ebenfalls hindeuten (s.o.). Die Einbindung negativer Wachstumsprozesse kann hier das Verständnis für lineare Zusammenhänge befördern und sollte daher noch stärker in das Design eingebunden werden.

Literatur

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 61, 103-131.

Hußmann, S. (2013). The role of focuses and commitments in learning processes. (in preparation, available as preprint).

Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S. & Barzel, B. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422.

Hußmann, S., Mühlenfeld, U., Richter, V. & Witzmann, C. (2015). Voraussagen mit dem Routenplaner – Mit Funktionen modellieren. Erscheint in: S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger, B. Barzel, (Hrsg.). *mathewerkstatt. Klasse 8*. Cornelsen: Berlin.

Hußmann, S. & Schacht, F. (2009). Toward an Inferential Approach Analyzing Concept Formation and Language Processes. Proceedings of CERME 6 (Lyon), 842-851.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B. & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunter Modell. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 65(8), 452-457.

Schacht, F. (2012). Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: D.A. Grouws (Hrsg.). Handbook of research on mathematics teaching and learning, 495-511.

Van Dooren, W. & Greer, B. (2010). Students´ behaviour in linear and non-linear situations. In: Mathematical Thinking and Learning, 12(1), 1-3.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In: L.P. Steffe & al (Hrsg.). Theories of Mathematical Learning. Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 219-239.

Vollrath, H.-J.(1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, 3-37.