Kurzfassung dieses Beitrags erscheint in Beiträge zum Mathematikunterricht 2012.

TIMO LEUDERS, SUSANNE PREDIGER,
STEPHAN HUSSMANN, BÄRBEL BARZEL, Freiburg/Dortmund

Genetische Lernarrangements entwickeln – Vom Möglichem im Unmöglichen bei der Entwicklung der Mathewerkstatt

Theoretisch-historische Ausgangspunkte

Das Konzept des genetischen Lernens zieht sich in den letzten Jahrhunderten wie ein roter Faden durch die pädagogische und didaktische Literatur, früh schon bei Dewey:

> „Der Weg zum Verständnis eines entwickelten Produktes führt durch das Studium seines Werdeganges . . . Indem wir es im Werden studieren, wird manches unserem Verhältnis zugänglich, das heute zu verwickelt ist, um unmittelbar erfasst zu werden." (Dewey 1915, S. 283).

Im Fach Mathematik wurde (neben den Naturwissenschaften) seit jeher das genetische Prinzip besonders stark betont (etwa von Klein 1908 und Toeplitz 1927). Seit den 1960er Jahren wurden zahlreiche theoretische Fundierungen und Ausdifferenzierungen vorgelegt:

> „Genetisches Lehren bedeutet, den Schüler in eine Lage versetzen, in der das noch unverstandene Problem so vor ihm steht, wie es vor der Menschheit stand, als es noch nicht gelöst war." (Wagenschein 1968, S. 14)

Auch Wittenberg (1963), Freudenthal (1973), Wittmann (1981), Winter (1989), Vergnaud (1996), Brousseau (1997) haben diese Ideen weiter entwickelt und Roths (1970) Ansatz der Rückverwandlung in überzeugenden Beispielen umgesetzt:

> „Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen, tote Sachverhalte in lebendige Handlungen zurückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind: Gegenstände in Erfindungen und Entdeckungen, Werke in Schöpfungen und Pläne in Sorgen, Verträge in Beschlüsse, Lösungen in Aufgaben, Phänomene in Urphänomene." (Roth, 1970, S. 116)

Anspruchsvoll ist nicht nur die Umsetzung dieser Forderungen, sondern auch die genauere theoretische Fassung und Abgrenzung des facettenreichen didaktischen Prinzips. Nicht jedes entdeckende Lernen ist genetisch; genetisches Lernen ist auch nicht notwendig historisch: Schon Toeplitz (1927) unterschied die direkte historisch-genetische von einer indirekten, nur an die historischen Kernideen anknüpfenden Vorgehensweise. Genetisches Lernen ist auch nicht nur im problemlösenden Unterricht zu realisieren, sondern kann sich auch im nachvollziehenden Folgen eines Vortrags entfalten. Schließlich ist eine genetische Begriffsbildung nicht ausschließlich an Anwendungskontexte gebunden, sondern kann sich auch innermathematisch vollziehen (siehe Strukturprobleme unten).

Wir wählen für die folgenden Betrachtungen diese (einengende) Definition: *Genetisches Lernen ist der durch Probleme angestoßene individuelle, aktive Vollzug eines Prozesses der Konstruktion eines mathematischen Begriffes oder Zusammenhangs, der sich schließlich als Lösung des Ausgangsproblem erweist.* Damit sind wir nah an Freudenthals „Mathematik in statu nascendi“ (Freudenthal 1973, S. 113) und an verwandten konstruktivistischen Konzepten (Hußmann 2002).

Fragestellungen und Vorgehensweisen

Trotz der langen Tradition des genetischen Prinzips und wiederholter „Existenzbeweise“ durch einzelne Konkretisierungen bleiben folgende zwei zentrale Fragen zu Umsetzbarkeit und Wirkungen offen:

1. Inwiefern kann das (bislang vor allen in ausgewählten Vorzeigebeispielen umgesetzte) genetische Prinzip tatsächlich für alle Inhalte im regulären Unterricht auch für schwächere Lernende umgesetzt werden?
   a) Bei welchen Inhalten ist dies schwer möglich, und woran liegt das? Wie lassen sich diese Hindernisse überwinden?
   b) Welche Unterstützungen brauchen Lehrkräfte für die Umsetzung?
2. Wie verlaufen die initiierten Lernprozesse tatsächlich? Welche Wirkungen haben sie?

Im Rahmen des langfristigen KOSIMA-Projekts (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen; Hußmann, Leuders, Barzel & Prediger 2011) bearbeiten wir diese Fragestellungen im Forschungsprogramm der Fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Gravemejier & Cobb 2006; Prediger & Link 2012) und verfolgen dabei vier Arbeitsbereiche:

- Implementation des genetischen Prinzips (und zahlreicher anderer Prinzipien, vgl. Barzel et al. 2011) durch ***Design von Lernumgebungen***, die am Ende in die Schulbuchreihe Mathewerkstatt (Barzel, Leuders, Hußmann & Prediger 2012) für die Klassen 5-10 mittlerer Schulformen einfließen.
- ***Curriculare Exploration*** des Möglichen im Unmöglichen durch kritische Reflexion der Designprozesse mit dem langfristigen Ziel, die Theorie des genetischen Prinzips weiter zu entwickeln.
- ***Erprobung der Lernumgebungen*** zur Weiterentwicklung und zur Spezifizierung des Bedarfs an Unterstützungen.
- ***Empirische Beforschung der initiierten Lernprozesse***, derzeit vorrangig in Bezug auf die Wirkungen im Prozess der Vorstellungsentwick-

lung (z.B. Prediger 2011a; Schnell & Prediger 2012; sowie in diesem Band Zwetzschler, Richter, Schnell, Hußmann & Schindler) und Teilaspekten von Kompetenzentwicklung (Ehret, in diesem Band, Philipp & Leuders 2012).

Angestrebt ist in Zukunft auch eine breitere Evaluation der Wirksamkeit. Dazu wird in Abgrenzung zu bestehenden psychologischen Studien zum discovery learning (Alfieri et al. 2011) zunächst zu spezifizieren sein, an welchen Zielen das genetische Lernen auf Wirksamkeit gemessen werden soll (vgl. Leuders & Holzäpfel 2011).

Die der curricularen Exploration zugrundeliegenden Designprozesse umfassen bzgl. des genetischen Prinzips folgende drei Schritte: 1. die Spezifizierung von Kernideen und Kernfragen, 2. die Suche nach geeigneten Kontexten und 3. die Konstruktion geeigneter Kontextprobleme (vgl. Leuders et al. 2011). Hierbei wurden fünf Herausforderungen des genetischen Prinzips und mögliche Ansätze zur Überwindung herausgearbeitet:

Herausforderung 1: Wenn Offenheit die Zielerreichung gefährdet - Zeitökonomie und Abgrenzungswissen

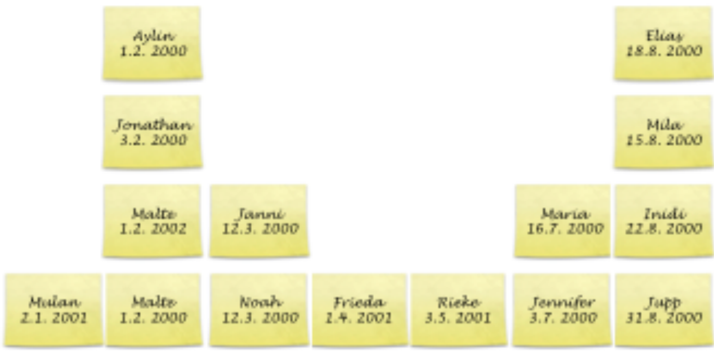
Offene Kontextprobleme laden ein zur divergenten, kreativen horizontalen Mathematisierung. Dies ist bildend und höchst erwünscht, stellt jedoch Lehrkräfte im Unterricht vor zweierlei Herausforderungen: Zum einen ist die Entwicklung alternativer Mathematisierungen *inhaltlich* nicht immer zielführend, zum Beispiel, wenn die Lernenden statt der relativen Häufigkeit zum fairen gruppenvergleich subtraktive Mathematisierungen vornehmen (Prediger 2011b). Dann muss zum richtigen Zeitpunkt deutlich werden, welche individuellen Vorschläge warum nicht der konventionellen Mathematik entsprechen. Zum anderen ist es zuweilen *zeitlich* nicht möglich, alle Alternativen zu entwickeln und zu diskutieren, dann muss ein Schulbuch aus Gründen der Zeitökonomie nach einer kurzen offenen Explorationsphase auch Konvergenz ermöglichen durch engere Vorgaben.

Herausforderung 2: Wenn Kontextprobleme nicht passend sind – Authentizität, Altersgemäßheit und Kontextkohärenz

Einige Probleme führen zwar genetisch zur intendierten Mathematik, lassen sich aber kaum in Kontexten altersgemäß konstruieren. So müssen etwa für die Entwicklung der Idee der relativen Häufigkeit die Zahlen klein sein, echte Kontextprobleme aber hantieren gerade mit unübersichtlich großen Zahlen. Auch führt der Anspruch, eine gewisse Kohärenz innerhalb eines Kontexts herzustellen, zuweilen zur Notwendigkeit von Anpassungen. Sucht man z.B. in Klasse 5 nach einem genetischen Weg zum Mittelwert, so kann man überzeugende genetische Vorschläge (wie z.B. Lengnink

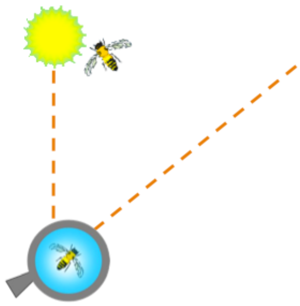
2008) mitunter wegen mangelnder Passung zur Altersgruppe nicht wählen. Wir haben uns für das Problem entschieden: „Haben die Jungen oder Mädchen unserer Klasse den größeren Fuß?“ (Barzel & Leuders 2012). Dieses führt auf natürliche Weise zur Lösung des „gleichmäßigen Aufteilens“, also zum Konzept des arithmetischen Mittels.

Für das Konzept des „Säulendiagramms“ (ebd.) war es dann nötig, möglichst im selben Kontext „Unsere Klasse kennenlernen“ zu verbleiben, also etwa nicht die Frage nach der Farbverteilung von M&M in ihren Verpackungen (Eichler & Vogel 2009) zu stellen, sondern auf das bewährte Problem der Zahl der Geburtstage in jedem Monat zurückzugreifen.



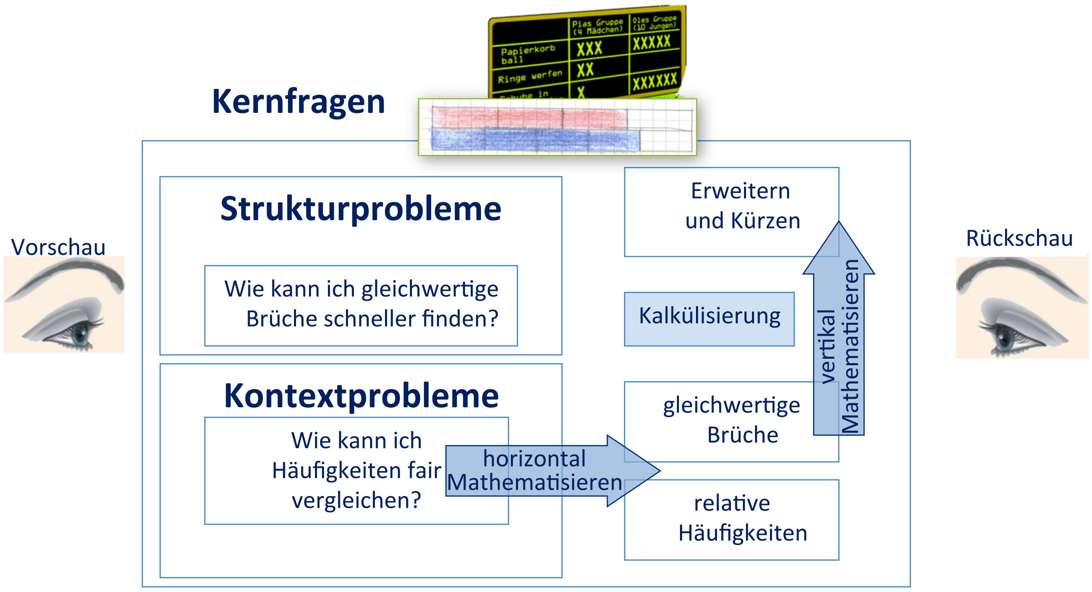
Herausforderung 3: Wenn zu Erfindendes schon alltäglich ist - Enttrivialisierung und Verfremdung

Manche Kernideen und mathematische Konzepte können Lernende nicht mehr selbst erfinden, weil sie ihnen aus dem Alltag längst vertraut sind, wie z.B. die Koordinaten als Antwort auf die Kernfrage „Wie kann man Orte gut beschreiben?“. Dann gilt es dennoch, die fertige Mathematik zu enttrivialisieren und die dahinter liegende Kernidee ins Bewusstsein zu rücken. Dazu hilft die Technik der Verfremdung, hier konkret durch den Kontext der Bienen, die zur Beschreibung von Orten Polarkoordinaten nutzen (Hußmann & Weber 2012).

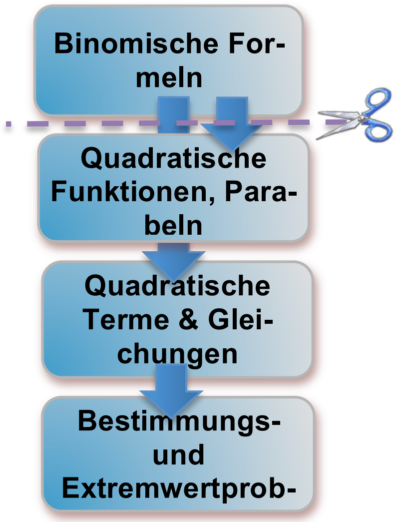


Herausforderung 4: Wenn Kontextprobleme nicht mehr funktionieren – vertikale Mathematisierung

Nicht alle mathematischen Inhalte lassen sich aus Kontextproblemen entwickeln, zum Beispiel der Übergang von der inhaltlichen Vorstellung der Gleichwertigkeit von Brüchen (die Lernende anhand der relativen Häufigkeit selbst erfinden können) hin zum Kalkül des Erweitern und Kürzens. Ähnliches gilt für Schematisierungsprozesse oder Fragen der Verallgemeinerung. Dann müssen durch Strukturprobleme *vertikale Mathematisierungen* (Treffers 1987, S. 247) angeregt werden. Zwar ist das Erweitern und Kürzen keine Antwort auf ein Kontextproblem, doch die allgemeine Idee der Kalkülisierung ist Antwort auf die Kernfrage, wie man komplexe Denkwege schematisieren und dadurch das Denken entlasten kann. Diese kann auch für Lernende erlebbar gemacht werden (vgl. Prediger 2011a).



Herausforderung 5: Wenn Vorschusslernen die Sinnstiftung bedroht - genetische Zwischenplattformen



In der traditionellen fachsystematischen Anordnung mancher Themen geraten genetische Beziehungen manchmal aus dem Blick und das Lernen wird zu einem Vorschusslernen. „Genetisch gedacht" helfen binomische Formeln beispielsweise bei der Lösung des Problems der Ermittlung von Extrema und Zielwerten quadratischer Probleme und müssten im streng genetischen Sinne auch hierfür entwickelt werden. Das würde aber zu einem unterrichtlichen Bogen von vielen Wochen führen und Lernende sowohl inhaltlich als auch in der Wahrnehmung der genetischen Struktur überfordern.

Hier gilt es, „genetische Zwischenplattformen" zu finden, also lokale Probleme und dazu passende Kontexte, die das genetische Entwickeln von Mathematik für die Lernenden plausibel erscheinen lassen, auch wenn die zentralen Verwendungszusammenhänge noch nicht verfügbar sind. Für das Thema „binomische Formeln" etwa lässt sich die Frage untersuchen, wie man durch das Arbeiten mit Termen Rechenwege verstehen und vereinfachen kann. Im Kontext der Rechentricks und Zahlenzaubereien gibt es hierfür tatsächlich eine ganze Menge von Phänomenen, die auf quadratische Terme führen (Leuders, Marxer & Rülander 2011).

Fazit

Neben empirischen Untersuchungen sind auch curriculare Explorationen eine wichtige fachdidaktische Forschungsmethode. Die konsequente, flächendeckende Durcharbeitung und Umsetzung didaktischer Prinzipien bringt für das altvertraute Konzept des genetischen Lernens neue praktische und theoretische Einsichten in Zusammenhänge, Einschränkungen und Möglichkeiten im Unmöglichen.

Anmerkungen

Alle Autorinnen und Autoren haben am Projekt gleichberechtigt mitgewirkt.

Literatur (nur in der elektronischen Langfassung des Artikels auf der Webseite)

Alfieri, L. , Brooks, P. J. , Aldrich, N.J. & Tenenbaum, H. (2011): Does discovery-based instruction enhance learning? In: Journal of Educational Psychology, 103(1), 1-18.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2012) (Hrsg.): Mathewerkstatt 5. Berlin: Cornelsen. (Ebenso mit anderer Hrsg-Namenreihenfolge Klasse 6-10).

Barzel, B. & Leuders, T. (2012). Im Tierreich – Großes und Kleines vergleichen und messen. In B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders & S. Prediger (Eds.), mathewerkstatt 5. Berlin: Cornelsen.

Brousseau, G. (1997): The theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Dewey, J. (1915): Demokatie und Erziehung. Weinhein, Basel: Beltz, (Nachdruck 1993)

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). Leitidee Daten und Zufall. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1. Stuttgart: Klett.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006): Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Hrsg.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. London: Routledge, 17-51.

Hußmann, S. (2002): Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen. Mathematik unterrichten in einer offenen Lernumgebung. Hildesheim: Franzbecker.

Hußmann, S., Leuders, T. , Barzel, B. & Prediger, S. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422.

Hußmann, S. & Weber, C. (2012): Wie sich Menschen und Tiere orientieren – Orte finden und beschreiben. Erscheint in S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bd. 1. Leipzig: B. Teubner.

Leuders, T. & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In: Unterrichtswissenschaft, 39(3), 213-230.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B. & Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. In: Praxis der Mathematik in der Schule 53(37), 2-9.

Leuders, T. & Rülander, N. (2011). Mit Zauber und Rechentricks zu binomischen Formeln - Sinnstiftende Kontexte für ein schwieriges Thema. Praxis der Mathematik in der Schule, 53(37), 19-27.

Philipp, K., & Leuders, T. (2012): Innermathematisches Experimentieren – empiriegestützte Entwicklung eines Kompetenzmodells und Evaluation eines Förderkonzepts. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel & N. Robin (Hrsg.): Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten. Münster: Waxmann.

Prediger, S. (2011a): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. In: Der Mathematikunterricht 57(3), 5-14.

Prediger, S. (2011b): Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Strategien zur Weiterarbeit mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten. In: Praxis der Mathematik in der Schule 53(40), 8-13.

Prediger, S. & Link, M. (2012): Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. Erscheint in: L.H. Schön u.a. (Hrsg.): Formate fachdidaktischer Forschung. Proceedings der GFD-Tagung 2011.

Roth, H. (1970): Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. Hannover: Schroedel, 12. Aufl.

Schnell, S. & Prediger, S. (2012): From “everything changes” to “for high numbers, it changes just a bit” – Theoretical notions for a microanalysis of conceptual change processes in stochastic contexts. In: ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 44(7).

Toeplitz, O. (1927): Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. In: Jahresber. Dtsch. Math. Verein. 36, 90-100.

Treffers, A. (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Vergnaud, G. (1996): The Theory of Conceptual Fields. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer (Hrsg.): Theories of Mathematical Learning. Mawah: Erlbaum, 220-239.

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Wittenberg, A. I. (1963): Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg.