Andrea SCHINK, Dortmund

Flexibler Umgang mit Brüchen – Strukturierungen von Lernenden zu Teil, Anteil und Ganzem

1. Facetten eines flexiblen Umgangs mit Brüchen

Viele empirische Studien dokumentieren Schwierigkeiten von Lernenden im Umgang mit Brüchen (z.B. Wartha 2007): Schwer fallen z.B. die situationsangemessene Aktivierung geeigneter Grundvorstellungen und das Interpretieren von Anteilen bzgl. des relevanten Ganzen. Andererseits zeigen sich immer wieder auch reichhaltige individuelle Strukturierungen.

Im Rahmen der hier vorgestellten mixed-methods-Design-Studie (Interviews in Klasse 6 und Paper-Pencil-Test in Klasse 7; Schink 2012) wurde das Konzept eines flexiblen Umgangs mit Brüchen entwickelt durch empirisch begründete Theoriebildung (vgl. Abb. 1).

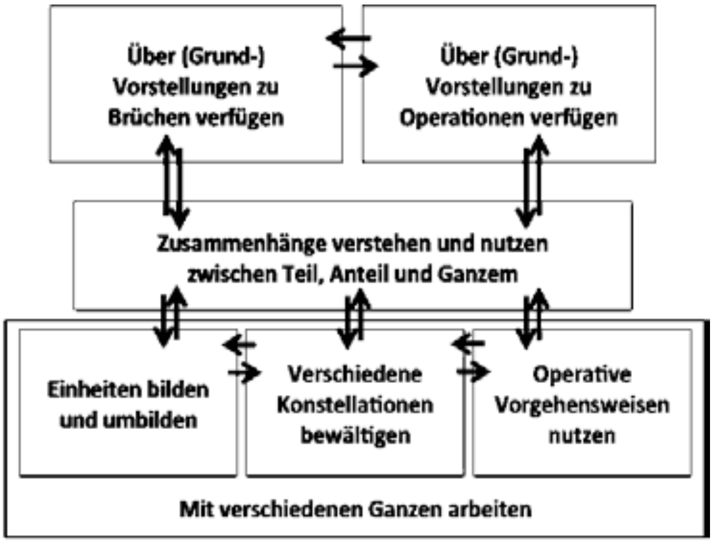

Abb. 1: Facetten eines flexiblen Umgangs mit Brüchen

Dem hier genutzten Konzept von *Flexibilität* liegt eine *Emergenz-Perspektive* zugrunde (z.B. Rathgeb-Schnierer 2010), nach der Lernende nicht aus einem Repertoire fertiger Strategien die jeweils geeignetste Strategie auswählen, sondern Lösungswege *spontan und individuell* in der Auseinandersetzung mit dem jeweiligen Problem generieren. Damit werden gleichzeitig im Sinne von Kreativität auch die Vielfalt (operativer) Strategien und die Fähigkeit betont, sich neuen Anforderungen anpassen zu können.

Wie in Abb. 1 gezeigt, besteht der *flexible Umgang mit Brüchen* aus vier miteinander verbundenen Facetten: 1. Bilden und Umbilden von Einheiten, 2. Bewältigen verschiedener Konstellationen, 3. Nutzen operativer Vorgehensweisen und 4. (als Basis) Arbeiten mit verschiedenen Ganzen.

1. Das (Um-)Bilden von Einheiten (z.B. das Zusammenfassen von Teilen eines Ganzen zu neuen Einheiten) wird vor allem in der internationalen Diskussion als wichtige Voraussetzung für multiplikatives Denken gesehen (z.B. Lamon 1994). 2. Unter der Fähigkeit, verschiedene Konstellationen

zu bewältigen, wird in Anlehnung an die Prozentrechendidaktik das Bearbeiten verschiedener Kombinationen gegebener und gesuchter Komponenten (Teil, Anteil, Ganzes) verstanden. Dabei soll nicht ein Aufgabe-Verfahren-Wissen oder ein Einüben von Formeln im Vordergrund stehen; vielmehr liegt der Fokus auf 3. (selbstinitiierten) operativen Vorgehensweisen, über die Lernende strukturelle Zusammenhänge herstellen und explorieren. 4. Die letzte und die anderen drei einbettende Facette ist die Fähigkeit, mit verschiedenen Ganzen arbeiten zu können. Damit ist sowohl das Umgehen mit wechselnden Bezugsgrößen (d.h. situationsadäquate Identifikation und Interpretation des Ganzen) als auch mit verschiedenen Qualitäten des Ganzen (Beschaffenheit und Strukturierung) gemeint (z.B. kontinuierlich wie ein Kuchen, diskret wie 30 Bonbons oder Mischformen).

In dieser Konzeptualisierung des flexiblen Umgangs wird somit auf Grundvorstellungen als inhaltliche, aus der Rückschau formulierte kognitive Konstrukte zurückgegriffen. Diese werden jedoch weiter ausdifferenziert bzgl. des Zusammenspiels der Komponenten Teil, Anteil und Ganzes.

In diesem Kontext ergaben sich für die Studie die folgenden zwei zentralen Forschungsfragen zum flexiblen Umgang mit Brüchen:

1. *Wie gehen Lernende in unterschiedlichen Konstellationen mit Teil, Anteil und Ganzem um?*
2. *Wie können Schwierigkeiten und Hürden von Lernenden beim Umgang mit Brüchen überwunden werden?*

2. Beispiele individueller Strukturierungen und Begründungen

Im Folgenden sollen drei knappe Beispiele den spezifischen Blick der Studie auf individuelle Strukturierungen, seinen Wert für die Analyse von Lernprozessen und seinen Beitrag zur Gestaltung von Lernarrangements verdeutlichen (ausführlicher in Schink 2012). Dazu werden Bearbeitungsprozesse aus Interviews betrachtet zur Aufgabe „Ole hat 6 Orangenbonbons. Das sind 2/3 von Oles und Pias Bonbons. Wie viele Bonbons haben beide zusammen?“:

Beispiel 1: Simon errechnet 36 als Ganzes und erklärt dies seinem Interviewpartner Akin im Laufe des Interviews folgendermaßen: *„Und das Ganze 2 mal. [...] Guck, weil er hat ja 2/3. – 1/3 wäre 18′ [...] und 2/3 wären 36. [...] Nein, weil guck mal Akin, er hat ja 6 Bonbons [...] Und das Ganze hat er ja 2 mal, also er hat ja 12 Bonbons schon mal.“* Hier wird deutlich, dass Simon im Kontext der Bonbons über die Einheit argumentiert, die er als 6 interpretiert und verdoppelt. Er nutzt also inhaltliche Überlegungen zu den Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem. In dieser Konstellation ist der Teil jedoch nicht für die *Einheit* vorgegeben, so dass seine Argumentation über die Zusammenhänge hier nicht trägt.

Beispiel 2: Miriam und Fatima, die auch 36 als Lösung erhalten, argumentieren eher im Kalkül, indem sie den Vergleich zu zuvor bearbeiteten Aufgaben mit Stammbruchanteil ziehen (sie verrechnen sich nur beim Produkt) und die Einbeziehung des Zählers erst im Nachhinein als Multiplikation deuten: *„[...] ja bei dem 1/4 und bei dem 1/6 ham wir die 1 weggelassen – aber hier sind ja 2…“* und *„[...] hier haben wir ja auch – 6 mal 8 gemacht und das warn ja 41, 41 mal 1 das wären ja auch 41 [...] deswegen hab ich 6 mal 3 und das dann nochmal das mal 2.“*

Beispiel 3: In Lauras Erklärung zeigt sich schließlich die Kraft operativer Argumentationen und flexibler Umstrukturierungen: *„[...] Also wenn [...] diese 6 Orangenbonbons da 3, 2/3 wären - dann [...] würde man doch rein theoretisch die <u>Hälfte</u> von 18 nehmen [...] dann müsste die Pia nämlich weniger haben als der Ole´, also plus - 3 weil es sind insgesamt 6, also kommt das auf 9 raus, weil – 1/3 wären in dem Fall [...] 3´ Bonbons, dann wären 2/3 6 Bonbons und 3/3, also das Ganze 9 Bonbons [...]“*

Diese drei Beispiele verdeutlichen, dass es sich lohnt, den mit dem Konzept des flexiblen Umgangs einhergehenden differenzierten Blick auf individuelle Strukturierungen von Lernenden zu Teil, Anteil und Ganzem einzunehmen, denn es können sich z.B. trotz gleicher Ergebnisse Begründungen und Vorstellungen auf völlig unterschiedlichen Ebenen verorten.

3. Befunde zu den Forschungsfragen und ihr Nutzen für die Praxis

Die exemplarisch dargestellten Prozesse verorten sich vor dem Hintergrund der hier in aller Kürze referierten Ergebnisse der Studie (vgl. Schink 2012):

Im Hinblick auf den Umgang mit Teil, Anteil und Ganzem in verschiedenen Konstellationen (Forschungsfrage 1) lässt sich feststellen, dass Lernende die Zusammenhänge zwischen den drei Komponenten auf vielfältige Art und Weise strukturieren.

Insgesamt waren die Lernenden im Test recht erfolgreich. Vor allem die Interviews zeigten vielfältige Zugänge und reichhaltige operative Vorgehensweisen. Dabei scheint die Qualität des Ganzen (diskret vs. kontinuierlich) für die Bearbeitungen eine größere Bedeutung zu haben als die Art der Konstellation. Darüber hinaus hat sie einen Einfluss auf die Bearbeitungswege, wenn z.B. in diskreten Kontexten Vorstellungen von kontinuierlichen Ganzen aktiviert werden. Gleichzeitig ist der Begriff „Ganzes“ durch vielfältige individuelle (Alltags-)Vorstellungen beeinflusst.

Der Blick auf Teil, Anteil und Ganzes sensibilisiert für die Komplexität von Strukturierungen und Interpretationen und kann damit dazu beitragen, Schwierigkeiten und Hürden von Lernenden beim Umgang mit Brüchen zu überwinden (Forschungsfrage 2): So lassen sich Uminterpretationen oder die Nutzung eines falschen Ganzen, Schwierigkeiten bei der Deutung des Zählers, fehlende relative Betrachtungen und nicht tragfähige Interpretationen von Operationen z.T. aus den hergestellten Zusammenhängen ableiten. Insbesondere wird dafür sensibilisiert, dass es sich stets um triadische Zusammenhänge handelt, d.h. dass alle drei Komponenten berücksichtigt werden müssen und sich auf Bearbeitungen auswirken können. Gleichzeitig liegt im (operativen) Erkunden und Bewusstmachen von relevanten und nicht relevanten Strukturen (z.B. in Bildern) eine Chance, Schwierigkeiten für Lernende zu thematisieren und damit zu überwinden.

Die Studie ist in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht" (KOSIMA) eingebunden (Hußmann et al 2011). Ergebnisse sind u.a. in die Gestaltung einer Lernumgebung zur Multiplikation von Brüchen eingegangen (Prediger / Schink et al. 2013): Die Interpretation des Ganzen ist dort Ausgangspunkt für das Reden über Anteile von verschiedenen Gruppen und Anteilen. Die Schwierigkeit einiger Lernender, Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und dem relevanten Ganzen zu interpretieren und strukturieren, wird damit aufgegriffen und explizit thematisiert. In diesem Sinne leistet die Studie einen Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion des (flexiblen) Umgangs mit Brüchen.

Literatur

Hußmann, S., Leuders, T., Barzel, B. & Prediger, S. (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsprojekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, 419-422.

Lamon, S. J. (1994): Ratio and proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In: G. Harel & J. Confrey (Hrsg.): The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany: SUNY Press, 89-120.

Prediger, S., Schink, A., Schneider, C. & Verschraegen, J. (2013, im Druck): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken. Erscheint in: S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): mathewerkstatt 6. Berlin: Cornelsen.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010): Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. In: JMD, 31(2), 257-283.

Schink, A. (2012): Flexibler Umgang mit Brüchen - Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem. Dissertation, TU Dortmund.

Wartha, S. (2007): Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs. Hildesheim: Franzbecker.