

Vorfassung von

Leuders, T. & Philipp, K. (2012). Innermathematisches Experimentieren – empiriegestützte Entwicklung eines Kompetenzmodells und Evaluation eines Förderkonzepts. In: Rieß, W., Wirtz, M., Barzel, B. (Hrsg). *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Theoretische Fundierung und empirische Befunde*. Münster: Waxmann. S.285-300

**Kathleen Philipp, Timo Leuders**

## **Innermathematisches Experimentieren**

–

### **empiriegestützte Entwicklung eines Kompetenzmodells und Evaluation eines Förderkonzepts**

#### **Abstract**

Das mit den Naturwissenschaften verbundene Konzept des Experimentierens lässt sich auch auf *mathematische* Erkenntnisprozesse von Mathematikern und speziell von Mathematiklernenden anwenden. Während diese Perspektive in theoretischen (soziologischen oder erkenntnistheoretischen) Analysen bereits eingenommen wurde, ist es in der empirischen Forschung der Mathematikdidaktik bislang wenig gebräuchlich. Im Rahmen der hier vorliegenden Untersuchung wird das Konzept des „innermathematischen Experimentierens“ (Experimentieren mit mathematischen Objekten) in zwei Schritten konkretisiert: zunächst auf Basis verschiedener vorliegender Theorien. Sodann empirisch durch eine qualitative Analyse von Aufgabenbearbeitungen und eine Interventionsstudie. Zentrales Ergebnis der ersten, qualitativen Studie ist ein Kategoriensystem, das experimentelle Vorgehensweisen von Lernenden in innermathematischem Kontext beschreibt. Dieses wiederum dient als Grundlage für die Identifikation zentraler experimenteller Strategien und damit für die Modellierung solcher experimenteller Kompetenzen. Inwiefern sich diese experimentellen Kompetenzen gezielt fördern lassen, wird im Rahmen einer zweiten Studie näher untersucht. Zu diesem Zweck wurde ein Training zur Förderung des Erwerbs experimenteller Strategien entwickelt und mit Schülerinnen und Schülern in neun Realschulklassen (N=227) umgesetzt. Die Ergebnisse zeigen eine nachhaltige Entwicklung experimenteller Kompetenzen, erfasst in eigens dafür entwickelten

Skalen. Dieser Beitrag gibt einen Überblick über das Gesamtprojekt, detaillierte Ergebnisse sind entsprechenden Einzelveröffentlichungen zu entnehmen.

## 1 Einleitung

Mathematiker kommen zu ihren Vermutungen über Zusammenhänge nicht etwa durch Ableitung aus bestehenden Sätzen, sondern durch „experimentelles Arbeiten“ mit Beispielen (Heintz, 2000). Dieser Teilaspekt mathematischen Erkenntnisgewinns lässt sich gut mit dem Modell des wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns von Peirce (Peirce & Walther, 1967) verbinden. Er unterscheidet drei Formen wissenschaftlichen Schließens: Abduktion, Induktion und Deduktion. Bei der *Abduktion* wird eine Hypothese gebildet, mit der ein Phänomen tentativ erklärt werden kann. Eine Hypothese in diesem Sinne ist zwar plausibel und liefert neue Erkenntnisse, aber sie ist zunächst unsicher. Peirce schreibt der *Induktion* die Funktion der Überprüfung einer Hypothese anhand von weiteren Einzelfällen zu. Hierzu ist ein deduktiver Zwischenschritt notwendig, bei dem Konsequenzen einer Hypothese expliziert werden. Peirce spricht an dieser Stelle auch von einem empirischen Erkenntnisweg (Meyer, 2007). In der Mathematik sind alle drei Schlussformen von Bedeutung (vgl. beispielsweise Pólya, 1954). Die *Deduktion* spielt insbesondere beim Begründen und Beweisen eine bedeutende Rolle und stellt eine spezifische Stärke der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin dar. Abduktive und induktive Prozesse sind im Entstehungsprozess von mathematischem Wissen jedoch zunächst bedeutsamer. Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen an Beispielen aus dem jeweiligen Phänomenbereich - nach Peirce abduktives und induktives Vorgehen - soll im Folgenden als *innermathematisches Experimentieren* bezeichnet werden. Schwerpunkt der Untersuchung dieses Teilprojekts ist also die fokussierte Betrachtung der für Mathematiklernen bedeutsamen Prozesse der Abduktion und Induktion.<sup>1</sup>

Ausgangspunkt des Gesamtprojektes ist die Ansicht, dass die spezifische Analyse abduktiver und induktiver Prozesse für das Verstehen von Lernprozessen förderlich ist. Gleichzeitig ist die Absicht der Autoren, durch diese Analyse die häufig formulierte These der prinzipiellen Wesensgleichheit mathematischen Tuns vom

---

<sup>1</sup> Weitere theoretische Darstellungen findet sich in Leuders und Philipp in diesem Band.

Kindesalter bis hin zur professionellen Forschung (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Wittmann, 2005) zu untermauern.

Das Konzept des Experimentierens wird in der Mathematik eher selten zur Beschreibung des individuellen und kollektiven Erkenntnisgewinns herangezogen (Leuders & Philipp, in diesem Band, s. aber Haverty et al., 2000), während es in den Naturwissenschaften bereits weitgehend ausgearbeitete konzeptuelle und empirische Arbeiten mit didaktischem Schwerpunkt zum Experimentieren gibt. Von besonderer Bedeutung ist für dieses Projekt das Modell des naturwissenschaftlichen Arbeitens als eine Suche in zwei Räumen (Klahr & Dunbar, 1988). Die Autoren beschreiben naturwissenschaftliches Lernen als einen ständigen Wechsel zwischen einem Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden und einem Experimentesuchraum, in dem Experimente durchgeführt werden. Einerseits werden dabei Vermutungen überprüft und andererseits der Phänomenbereich erkundet, so dass wiederum neue Vermutungen aufgestellt werden können. In diesem Sinne entsprechen diese Tätigkeiten eher dem typischen Vorgehen beim „Mathematiktreiben“ als andere Modelle, die Experimentieren als ein systematisches Abarbeiten von Schritten beschreiben. Die Beschreibung des Experimentierens als Suchprozesse in diesen Suchräumen lässt sich auf mathematisches Denken übertragen und soll zu einem vertieften Verständnis von induktiven und abduktiven Denkprozessen führen. In erster, grober Näherung entspricht der Phänomenraum im naturwissenschaftlichen Experimentierkontext dem mathematischen Phänomenraum, konstituiert in der Menge aller verfügbarer Beispiele. Das naturwissenschaftliche Experiment zur Überprüfung einer Hypothese entspricht aufseiten der Mathematik der rationalen Auswahl eines Beispiels zur Überprüfung einer Vermutung. Die Reichweite und historische Basis dieser Analogie wird bei Leuders und Philipp in diesem Band tiefer diskutiert.

In der hier vorgestellten Arbeit werden Experimentierhandlungen von Lernenden unterschiedlichen Alters in innermathematischem Kontext empirisch erfasst und mit theoretischen Vorüberlegungen zu einer Theorie des innermathematischen Experimentierens entwickelt. Auf der Grundlage dieser Theorie werden Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens identifiziert und operationalisiert sowie zur Überprüfung eines Trainings experimenteller

Teilkompetenzen eingesetzt. Die beiden zentralen Forschungsfragen für die empirischen Untersuchungen lauten also:

- Welche Vorgehensweisen lassen sich beim innermathematischen Experimentieren beschreiben und ggf. typisieren?
- Inwiefern lassen sich solche typischen Vorgehensweisen bei Lernenden fördern?

Im Projekt bedarf es somit einer ersten theoriegenerierenden, qualitativen Untersuchung, die eine solide empiriegestützte Basis für die nachfolgenden Analysen liefern soll (Leuders et al., 2011; Philipp et al., 2009). Anschließend können die so beschriebenen Vorgehensweisen zu Kompetenzen verdichtet und messbar gemacht werden. Auf diese Weise lassen sich spezifische Interventionen zur Förderung experimentellen Denkens konzipieren und auf ihre Wirksamkeit prüfen (Philipp & Leuders, 2011; Philipp & Leuders, 2010).

## **2 Methode der qualitativen Videostudie**

Zielsetzung der Untersuchung<sup>2</sup> ist es, empirische Bausteine zur Entwicklung einer Theorie des innermathematischen Experimentierens zu gewinnen. Gleichzeitig werden sowohl geeignete Aufgabenformate und Untersuchungsmethoden evaluiert. Hinsichtlich dieser Zielsetzungen ist ein qualitatives Forschungsdesign geeignet. Zur Erfassung von Vorgehensweisen wurden Videoaufzeichnungen von Probanden bei der Bearbeitung von Aufgaben gemacht, um sowohl Handlungen als auch Äußerungen bei der Analyse berücksichtigen zu können.

### **2.1 Auswahl der Stichprobe**

Ziel der Auswahl war es, eine möglichst große Vielfalt an Vorgehensweisen beobachten zu können (Patton, 2002). Somit wurden auf der einen Seite Studierende und auf der anderen Seite Grundschüler ausgewählt.

Zunächst wurde eine Gruppe von insgesamt neun Studierende untersucht, die wiederum in drei Untergruppen gegliedert waren: Mathematik nicht als Fach gewählt (n=4), Mathematik als Fach (n=4), Tutorentätigkeit im Fach Mathematik (n=1). In einer weiteren Phase wurde die Studie auf je sechs Schülerinnen und Schüler der

---

<sup>2</sup> In diesem und dem folgenden Abschnitt werden Teile einer bereits publizierten ausführlicheren Darstellung von Leuders, Naccarella, und Philipp (2011) zusammengefasst.

Klassen 3 und 4 ausgeweitet. Die Größe der Gesamtstichprobe ergab sich durch Sättigung theoretischer Konzepte im Rahmen der Grounded Theory (vgl. Abschnitt 2.4).

## **2.2 Auswahl der Aufgaben**

Um Vorgehensweisen vergleichen zu können, bearbeiteten alle Probanden dieselben Aufgaben, die nach den drei folgenden, zentralen Kriterien ausgewählt wurden:

- Offenheit der Fragestellung,
- Zulassen einer Vielzahl von Vermutungen und
- problemloses Generieren von Beispielen.

Da die Aufgaben von allen Kohorten bearbeitet wurden, war die Anzahl an mathematischen Themenbereichen beschränkt. Folglich wurden Aufgaben gewählt, die nur grundlegende mathematische Fähigkeiten abverlangten: Zahlenverständnis, Grundrechenarten und einfache geometrische Vorstellungen.

Darüber hinaus sollte es sich bei den Aufgaben nicht um gänzlich neue Formate handeln. Es wurde darauf geachtet, auf traditionelle und in der schulischen Praxis bewährte und bekannte Aufgaben zurückzugreifen. Zum einen, um von den reichhaltigen Erfahrungen mit den Aufgaben profitieren zu können und zum anderen, um zu zeigen, dass dem Experimentieren in der Mathematik eine praktische (und bewährte) Bedeutung zukommt. Zu jeder Aufgabe wurden verbale Impulse formuliert, die nach dem Prinzip der minimalen Hilfe (Aebli, 1976) beim Bearbeitungsprozess gegeben werden konnten, sollte dieser ins Stocken geraten.

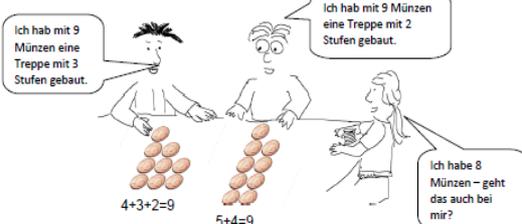
Bezüglich der Darstellungsarten konnten die Aufgaben im Verlauf der Studie weiterentwickelt werden, indem das Vorgehen der Probanden sukzessive analysiert und reflektiert wurde, so dass die Aufgabenstellungen optimiert werden konnten. Beispielweise wurde der Summenimpuls der in Abb. 18.1 dargestellten Aufgabe erst später hinzugefügt, um neben der bildlichen Darstellung einen weiteren Impuls zu geben.

Insgesamt wurden folgende fünf Aufgaben eingesetzt: Treppenzahlen, IRI-Zahlen, verrückt Rechnen, Zahlenbäume und Minusmauern (Leuders et al., 2011).

Exemplarisch wird hier die Aufgabe „Treppenzahlen“ (vgl. auch Schwätzer & Selter, 1998) vorgestellt:

Abbildung 18.1: Beispielaufgabe Treppenzahlen

**Treppenzahlen / Reihenfolgezahlen**



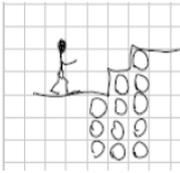
Ich hab mit 9 Münzen eine Treppe mit 3 Stufen gebaut.

Ich hab mit 9 Münzen eine Treppe mit 2 Stufen gebaut.

Ich habe 8 Münzen – geht das auch bei mir?

$4+3+2=9$        $5+4=9$

Die drei Zahlenforscher (Till, Ole und Maria) untersuchen Treppenzahlen.



Was kannst du alles über Treppenzahlen herausfinden?

Diese Aufgabenstellung kann Lernende dazu veranlassen, mehrere Beispiele auszuprobieren sowie Aussagen (Vermutungen) über Treppenzahlen zu machen. Typische Vermutungen, die zu weiteren Überlegungen veranlassen, sind anfangs „man kann mit allen Zahlen eine Treppe bauen“, „man kann mit geraden Zahlen keine Treppe bauen“ etc. Zu solchen Vermutungen kommen bereits Lernende im Grundschulalter. Die Aufgabe hat darüber hinaus auch Potenzial für ältere Lernende, wenn man beispielsweise nach konkreten Treppen zu einer vorgegeben Zahl fragt „wenn die Zahl durch 5 teilbar ist, kann ich eine Fünftertreppe bauen“ etc. Die so gewonnenen Vermutungen können unmittelbar an weiteren Beispielen geprüft werden (Leuders et al., 2011). In diesem Sinne ist die hier dargestellte Aufgabe in besonderem Maße geeignet, abduktive und induktive Prozesse bei Lernenden zu induzieren.

### 2.3 Auswahl der Methoden

Im Verlauf der Studie konnten mehrere Erhebungsmethoden systematisch eingesetzt und miteinander verglichen werden, so dass im Hinblick auf die Fragestellung mehr bzw. weniger ergiebige Methoden identifiziert werden konnten. Auf der Basis von theoretischen Vorüberlegungen wurden die vier Methoden „lautes Denken“, „Prozessintervention“, „stimulated recall“ und „Dyade“ angewendet (Leuders et al., 2011).

Im Verlauf der Studie kristallisierten sich die Methoden des lauten Denkens (Verbalisieren von Gedanken beim Bearbeitungsprozess) und der Dyade (Bearbeiten einer Aufgabe in Zweiergruppen) als ergiebig heraus. Die Methode der Prozessintervention (Stoppen des Bearbeitungsprozesses und gezieltes Nachfragen nach Gedanken und Vorhaben) erwies sich als sehr starker Eingriff in den Bearbeitungsprozess und die Methode des stimulated recall (nachträgliches Kommentieren von gezielt ausgewählten Videosequenzen) überforderte besonders die Schülerinnen und Schüler eine Überforderung dar, während sie bei der Untersuchung der Studierenden nicht notwendig war, da die Methode des lauten Denkens hier bereits sehr aufschlussreich war.

## **2.4 Auswertung**

Die Durchführung der Studie und die Datenauswertung basierten auf dem Modell der „Grounded Theory“ nach Glaser und Strauss (1998). Dieser Begriff lässt sich mit „gegenstandsverankerte Theoriebildung“ übersetzen (Mayring, 2002). Darunter versteht man ein Verfahren, bei dem die Phasen der Datenerhebung und die der Auswertung nicht voneinander getrennt sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. So richtete sich beispielweise die Auswahl der weiteren Probanden nach den ersten Auswertungsergebnissen. Ziel der Grounded Theory ist es, eine Theorie auf Basis empirischer Untersuchungen und theoretischen Konzepten zu bilden. Dabei wird die Theorie schrittweise konzipiert, modifiziert und ergänzt, indem permanent zwischen Phasen der Datenerhebung und Phasen der Auswertung gewechselt wird. Auf diese Weise konnte das Kategoriensystem zur Beschreibung experimenteller Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren ausdifferenziert werden. Ein weiteres charakteristisches Merkmal der Grounded Theory ist der Einsatz verschiedener Erhebungsmethoden im Verlauf der Untersuchung wie im

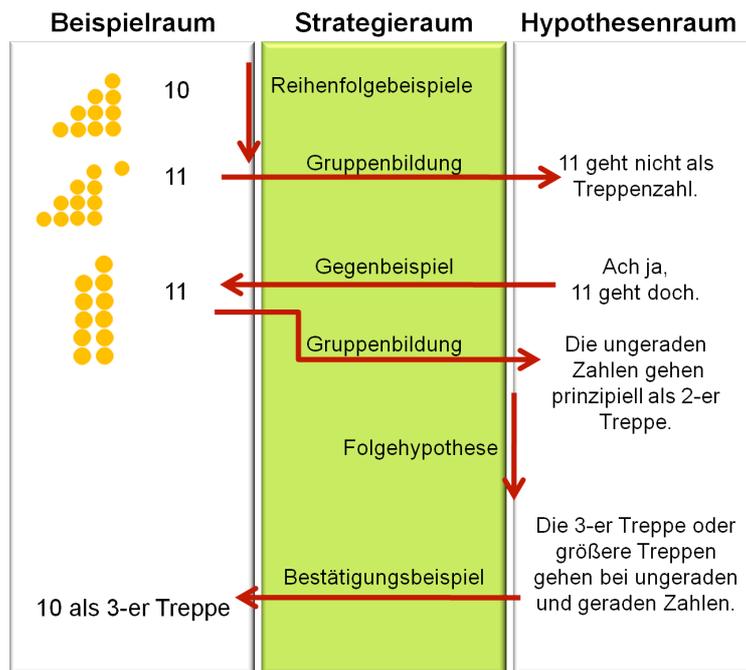
vorigen Abschnitt beschrieben. So war es möglich, die Passung von Fragestellung und Methoden zu optimieren.

Das Verfahren der Grounded Theory beinhaltet drei verschiedene Phasen des Kodierens: offenes, axiales und selektives Kodieren (Böhm, 2005). Offenes Kodieren ist dadurch gekennzeichnet, dass es sehr kreativ ist, trotzdem aber systematisch Zeile für Zeile abläuft. Durch dieses Vorgehen ließ sich eine Vielzahl verschiedener Vorgehensweisen identifizieren. In der zweiten Phase des axialen Kodierens wurden zentrale Vorgehensweisen hervorgehoben, indem Zusammenhänge der Vorgehensweisen analysiert wurden. Diese zentralen Vorgehensweisen mündeten dann in der Formulierung einer Theorie zum innermathematischen Experimentieren (selektives Kodieren).

### **3 Ergebnisse der qualitativen Videostudie**

Zur Analyse der Bearbeitungsprozesse war das oben genannte Modell des Experimentierens als Suche in zwei Räumen hilfreich. Versteht man das Untersuchen von Beispielen in der Mathematik als Experiment, so können beim innermathematischen Experimentieren ebenfalls zwei Räume voneinander unterschieden werden: Beispielraum und Hypothesenraum. Allerdings zeigen sich die Vorgehensweisen der Schülerinnen und Schüler, die hier betrachtet werden sollen, nicht in der Art der Arbeit *innerhalb* eines Raumes sondern genau im Wechsel *zwischen* den beiden Räumen, so dass wir das Modell um einen dritten Raum, einen Strategieraum erweitert haben. Dieser erfasst die Vorgehensweisen in ihrer spezifischen Qualität (vgl. Abb. 18.2).

Abbildung 18.2: Drei-Räume-Modell



Die in Tabelle 18.1 exemplarisch aufgeführten *Vorgehensweisen* (eine vollständige Tabelle findet sich in Leuders et al., 2011) sind wesentliches Ergebnis der qualitativen Studie. In Auszügen sind hier ausschließlich solche aufgeführt, die unmittelbar experimentelles Arbeiten kennzeichnen. In Tabelle 18.1 werden die Vorgehensweisen zunächst benannt (Kode), in den Kodenotizen genauer definiert und anhand eines Ankerbeispiels illustriert.

Tabelle 18.1: Beispiele für experimentelle Vorgehensweisen

Vorgehensweise/Kode	Kodenotiz	Beispiel
<b>Adhoc-Hypothese</b>	Hypothese wird intuitiv formuliert und als Anker für weitere Überlegungen genutzt.	„Geht nur bei geraden Zahlen“ „spontan: 9“
<b>Beispielorientierte Hypothese</b>	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.	„Weils ein Dreieck ist, da kann man nicht so einen Strich rein machen. Es muss mindestens ein Viereck sein.“
<b>Gegenbeispiel</b>	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
<b>Bestätigungsbeispiel</b>	Beispiel wird genutzt, um Vertrauen in eine Vermutung zu gewinnen.	„Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“ Probiert die 16.
<b>Gruppenbildung</b>	Strukturierung des Beispielbereichs.	kleine – mittlere – große Zahlen haben unterschiedlich viele Teiler
<b>Reihenfolgebeispiele</b>	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge generiert.	Die Zahlen von 1 bis 20 als Zahlenbäume darstellen.

... ..

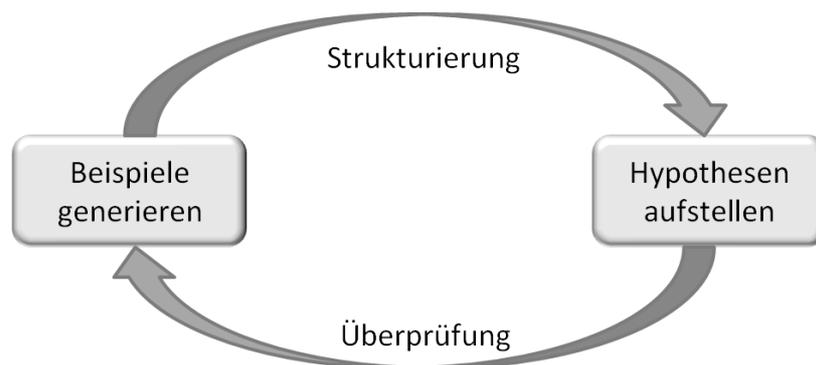
Grob lassen sich die gefundenen Vorgehensweisen in vier Bereiche gliedern, die jedoch nicht überschneidungsfrei sind, sondern zahlreiche Verknüpfungen haben. Die vier Bereiche sind so zu verstehen, dass die Codes in der Terminologie der Grounded Theory zu so genannten „Familien“ gruppiert werden:

- Beispiele generieren
- Strukturierung
- Hypothesen aufstellen
- Überprüfung

Setzt man diese vier zentralen Bereiche zueinander in Beziehung, so kann man sie als idealisierte Teilschritte des innermathematischen Experimentierens betrachten: Beispiele werden generiert und in irgendeiner Weise strukturiert, so dass eine Vermutung geäußert werden kann, die in einem weiteren Schritt überprüft wird.

Versteht man diese vier Schritte derart, dass sie Fähigkeiten beschreiben, die beim Experimentieren mit mathematischen Objekten bedeutend sind, kann dieses Modell auch zur Beschreibung der Struktur experimenteller Kompetenzen beim innermathematischen Experimentieren dienen (vgl. Abb. 18.3).

**Abbildung 18.3: Modell zum innermathematischen Experimentieren**



Die empirische Überprüfung dieser Annahme durch eine Kompetenzmodellierung und Prüfung der Sensibilität im Rahmen einer Intervention ist Gegenstand der zweiten empirischen Studie.

## 4 Methode der Interventionsstudie

Zentrale Fragestellung dieser Studie war:

- Inwiefern lassen sich Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens durch ein gezieltes Training fördern?

Dabei ist zu klären, wie ein solches Training aussehen kann, welche Aufgaben sich dafür eignen und wie man sie einsetzen kann.

Eng mit der Frage verbunden ist eine zweite Fragestellung:

- Inwiefern sind diese Teilkompetenzen psychometrisch erfassbar und unterscheidbar?

Hierzu müssen die im Modell zusammengefassten Teilkompetenzen operationalisiert werden

### 4.1 Die Intervention

Die Förderung experimenteller Teilkompetenzen orientierte sich an bewährten Modellen für Strategietrainings (Klauer, 1993; Bruder, 2003; Stern, 1992) und war in vier Phasen gegliedert:

1. Hinführung
2. Explizieren von Vorgehensweisen
3. Reflexion von Vorgehensweisen
4. Transfer

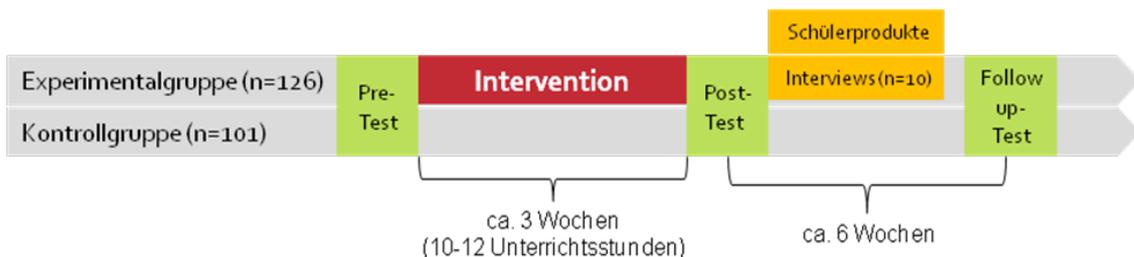
Eingebettet wurde die Förderung in Bestandteile einer Unterrichtskonzepts, das im Rahmen des Projekts KOSIMA entstand (Leuders, 2012). In der so entstandenen Unterrichtseinheit mit insgesamt zwölf Aufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler zentrale Begriffe des Lehrplans, wie z.B. Teiler, Vielfache und Primfaktoren. Zugleich werden die Fähigkeiten gefördert mit Hilfe zentraler experimenteller Strategien (vgl. Abschnitt 3) mathematische Probleme zu lösen. Dabei übernehmen die Kinder die Rolle von „Zahlenforschern“, die bestimmte Eigenschaften von natürlichen Zahlen erkunden.

Die zwölf Aufgaben wurden gemäß den oben genannten vier Phasen eingesetzt: Die Schülerinnen und Schüler wurden an die Art der Aufgaben herangeführt. Einige

Kernaufgaben dienten dazu, die Strategien zu verankern, indem sie expliziert wurden und deren Verwendung reflektiert wurde. Weitere Aufgaben stellten ein Übungsfeld für den bewussten Einsatz der Strategien dar. Zentrale Bausteine des Trainings waren das Verbalisieren eigener Bearbeitungsschritten sowie der diesbezügliche Austausch darüber. Unterstützt wurde das Anwenden der Strategien durch Impulse (beispielsweise „Schreibe einige Beispiele auf.“), die den Schülerinnen und Schülern in Form von Schlüsseln zur Verfügung standen und bei der Aufgabenbearbeitung eingesetzt werden konnten.

Zur Erfassung des Lernerfolgs der Schülerinnen und Schüler bezüglich der Entwicklung experimenteller Teilkompetenzen wurde ein Test der den Lernzuwachs in diesem Bereich messen sollte vor und nach der Unterrichtseinheit durchgeführt. In ähnlichem Zeitabstand wurde derselbe Test in Kontrollklassen durchgeführt, um das Ausmaß des Lernerfolgs des Förderkonzepts vergleichen zu können. Sechs Wochen nach Beendigung der Unterrichtseinheit wurde der Test ein drittes Mal durchgeführt, um Informationen über die Nachhaltigkeit der Förderung zu gewinnen.

Abbildung 18.4: Forschungsdesign der Interventionsstudie

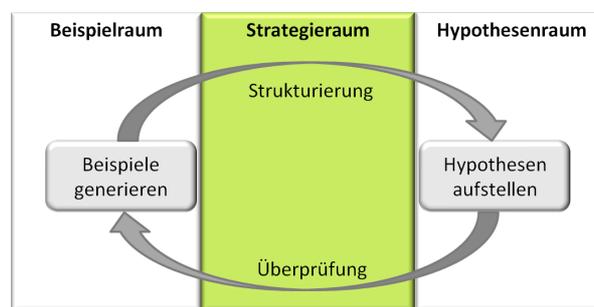


Die Unterrichtsintervention wurde in einer 6. Jahrgangsstufe an Realschulen in einem Zwei-Gruppen-Design mit Experimental- (n=126) und Kontrollgruppe (n=101) durchgeführt wie in Abbildung 18.4 dargestellt. In allen Klassen wurden die Unterrichtsinhalte Teilbarkeit und Primzahlen behandelt sowie zu drei Zeitpunkten ein Test durchgeführt. Die Experimentalgruppe nahm im Rahmen der Unterrichtseinheit an dem Training teil, die Kontrollgruppe nicht. Alle Komponenten der Intervention wurden in insgesamt drei Pilotierungsphasen formativ evaluiert und optimiert. Maßnahmen zur Kontrolle der Studie waren Unterrichtsbeobachtung in ausgewählten Stunden, schriftliche Rückmeldung der Lehrkräfte zu jeder Unterrichtsstunde sowie das Führen eines „Forscherhefts“ durch die Schülerinnen und Schüler.

## 4.2 Testinstrument

Basis für die Entwicklung von Testitems bildete das theoretische Modell des innermathematischen Experimentierens, das Teilkompetenzen modelliert. Hierbei wurden zwei Bereiche<sup>3</sup> des Modells operationalisiert: der Bereich *Strukturierung* und der Bereich *Überprüfung*. Diese beiden Bereiche repräsentieren die Richtung der Raumwechsel zwischen Beispielraum und Hypothesenraum wie in Abbildung 18.5 dargestellt und sind als abduktive und induktive Prozesse beim innermathematischen Experimentieren interpretierbar.

Abbildung 18.5: Kompetenzmodellierung im Drei-Räume-Modell



Der Test bestand aus mehreren Teilen, einem Aufgabenteil und einem Fragebogenteil. Der Leistungstest beinhaltete einerseits Verständnisaufgaben, die das Verständnis nachfolgender Aufgaben sichern sollten, in der Bewertung aber nicht berücksichtigt wurden, sowie Items zu den beiden oben genannten Bereichen. Im Bereich Strukturierung sollten die Schülerinnen und Schüler Strukturen erkennen und Vermutungen formulieren. Im Bereich Überprüfung sollten vorgegebene Vermutungen geprüft werden. Keine der Aufgaben wurde im Rahmen der Intervention behandelt, so dass hier eine Transferleistung der Schülerinnen und Schüler sowohl der Experimental- als auch der Kontrollgruppe notwendig war.

Daneben wurden mögliche Moderatorvariablen wie das Geschlecht, Mathematiknote, Deutschnote sowie Motivation, (auf das Fach Mathematik bezogenes) Selbstbild<sup>4</sup> und die Fähigkeit zum induktiven Denken<sup>5</sup> erfasst. Gewählt wurden solche Variablen, bei denen ein möglicher Zusammenhang mit Testergebnissen vermutet wurde, der

<sup>3</sup> In einer der Pilotphasen wurde zunächst versucht, alle vier Bereiche messtheoretisch voneinander trennen zu können, was sich als empirisch nicht nachweisbar herausstellte.

<sup>4</sup> Die Items zu den Skalen „Motivation“ und „Selbstbild“ sind aus PISA-Erhebungen entnommen..

<sup>5</sup> Entnommen aus dem Intelligenztest CFT 20-R.

somit letztlich nicht auf die Intervention zurückzuführen wäre. Auf diese Weise war es möglich, diese Einflüsse zu kontrollieren.

## **5 Ergebnisse der Interventionsstudie**

Zur Erfassung experimenteller Teilkompetenzen wurden mehrere Skalen entwickelt, operationalisiert und empiriegestützt optimiert. Dabei ergab sich eine differentiell valide Erfassung von zwei Teilbereichen experimenteller Kompetenz: die Bereiche „Strukturierung“ und „Überprüfung“ (erscheint in Philipp, vor. 2012).

Bei der gesamten Experimentalgruppe lässt sich im Post-Test eine deutliche Verbesserung feststellen. Betrachtet man konkrete Aufgabenlösungen, ist anzumerken, dass die Schülerinnen und Schüler dieser Gruppe besonders im Bereich Strukturierung sowohl hinsichtlich der Anzahl der Vermutungen als auch der inhaltlichen Qualität der Aussagen Fortschritte gemacht haben. Der Kompetenzzuwachs ist auch im Bereich Überprüfung deutlich, wobei vor allem die Strategie, ein Gegenbeispiel zu suchen, im Post-Test zu beobachten war.

Verglichen mit der Kontrollgruppe ist festzustellen, dass die Experimentalgruppe bei den Testaufgaben nach der Intervention besser abgeschnitten hat. Auch nach Durchführung eines dritten Tests war in dieser Gruppe noch nach sechs Wochen weiterer Lernzuwachs in den oben genannten Teilfähigkeiten erkennbar. Anzumerken ist, dass mittels des Tests ausschließlich diese Fähigkeiten gemessen wurden und nicht Unterrichtsinhalte wie Teilbarkeit oder Primzahlen abgeprüft wurden. Der Unterschied zwischen den beiden Gruppen zeigt sich also nicht im inhaltlichen sondern im strategischen Bereich.

Die Vergleichbarkeit der beiden Gruppen zum ersten Messzeitpunkt wurde aufgrund der fehlenden Randomisierungsmöglichkeit mittels einer multivariaten Varianzanalyse überprüft. Im Bereich des Selbstbildes wurde ein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen festgestellt. In allen anderen erhobenen Bereichen gab es keine signifikanten Unterschiede. In die folgenden Analysen ging das Selbstbild der Lernenden als Kovariate ein.

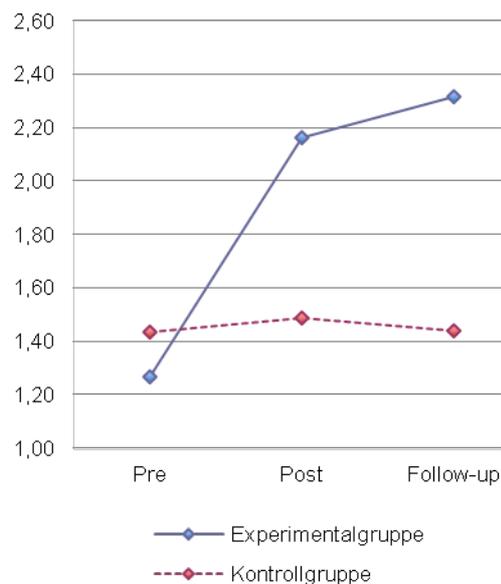
Sowohl im Bereich Strukturierung als auch im Bereich Überprüfung wurde eine Kovarianzanalyse mit Messwiederholung durchgeführt, um die Wirksamkeit des

Förderkonzepts zu analysieren. In beiden Bereichen zeigen sich sowohl signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen als auch hohe Effektstärken (vgl. Tabellen 18.2 und 18.3 sowie Abbildungen 18.6 und 18.7). Diese lassen sich möglicherweise darauf zurückführen, dass das theoretische Modell zum innermathematischen Experimentieren empiriegestützt entwickelt wurde und es damit möglich war, die Intervention auf tatsächliche Schülerprozesse abzustimmen (Philipp & Leuders, 2011).

**Tabelle 18.2: Interventionseffekt im Bereich Strukturierung**

Effekt	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Zeit*Gruppe	0,000	0,307

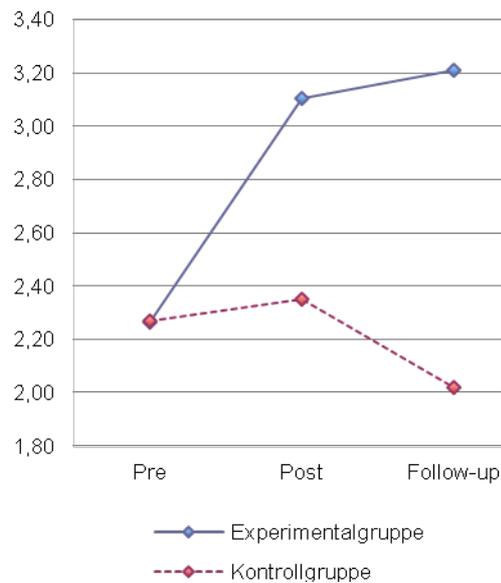
**Abbildung 18.6: Gruppenunterschiede im Bereich Strukturierung**



**Tabelle 18.3: Interventionseffekt im Bereich Überprüfung**

Effekt	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Zeit*Gruppe	0,000	0,183

**Abbildung 18.7: Gruppenunterschiede im Bereich Überprüfung**



Detaillierte Informationen zur Intervention und eine vertiefte Analyse zu deren differentiellen Wirkungen werden an anderer Stelle berichtet (Philipp, vor. 2012). Hierbei werden auch Unterschiede zwischen unterschiedlich leistungsstarken Kohorten genauer betrachtet, um zu untersuchen, ob unterschiedlich leistungsstarke Schülerinnen und Schüler unterschiedlich von dem Förderkonzept profitieren. Außerdem sollen Einflussfaktoren, die das Erlernen experimenteller Teilfähigkeiten begünstigen, untersucht werden.

## **6 Zusammenfassung und Diskussion**

Wesentliches Ziel der Arbeit war es, ein sowohl theoretisch als auch empirisch fundiertes Konzept zum innermathematischen Experimentieren zu entwickeln, indem abduktive und induktive Prozesse im Umgang mit innermathematischen Situationen untersucht wurden. Zur Analyse dieser Prozesse ließ sich das Modell der *Scientific Discovery As Dual Search* nach Klahr und Dunbar als Basis für ein um einen Strategieraum erweitertes und modifiziertes *Drei-Räume-Modell* nutzen, der den Beispielraum und den Hypothesenraum verbindet und die Art und Weise des Wechsels zwischen beiden Räumen offenlegt.

Ergebnis dieser Analyse ist ein umfassendes *Kategoriensystem* zur Beschreibung von Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern, aus dem ein *Kompetenzstrukturmodell* entwickelt werden konnte, das experimentelle

Teilkompetenzen in innermathematischem Kontext beschreibt. Hierfür wurden vier zentrale Kategorien identifiziert, deren Zusammenspiel innermathematisches Experimentieren charakterisiert. Gleichzeitig ist es gelungen, Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens zu erfassen. Auf diese Weise konnte ein umfassendes *Modell zum Prozess des innermathematischen Experimentierens* theoretisch gewonnen und empirisch ausdifferenziert werden.

Aufbauend auf dieses empiriegestützte Kompetenzmodell, konnte ein *Förderkonzept* experimenteller Teilfähigkeiten ausgearbeitet werden, das im Rahmen der Intervention umgesetzt wurde. Diese Intervention fand im Umfeld regulären Unterrichts mit geeignet informierten und geschulten Lehrkräften statt. Die Ergebnisse sind ermutigend hinsichtlich der Nutzung der Ergebnisse dieser Arbeit zur konkreten Förderung mathematischer Kompetenzen in der Praxis.

Das Projekt konnte insgesamt zur theoretischen und empirischen Fundierung induktiver und abduktiver Prozesse und Kompetenzen im Mathematikunterricht beitragen.

## Literatur

- Aebli, H. (1976). *Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf kognitionspsychologischer Grundlage* (9., stark erw. und umgearb. Aufl.). Stuttgart: Klett.
- Böhm, A. (2005). Theoretisches Codieren: Textanalyse in der Grounded Theory. In U. Flick, E. v. Kardorff, & I. Steinke (Eds.), *Rororo Rowohlt's Enzyklopädie: Vol. 55628. Qualitative Forschung. Ein Handbuch* (pp. 475–485). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl.
- Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens: Material im Rahmen des BLK-Programms "Sinus" zur "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"*. Kiel: IPN.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. A. L. (1998). *Grounded theory: Strategien qualitativer Forschung*. Bern: Huber.
- Haverty, L., Koedinger, K. R., Klahr, D., & Alibali, M. W. (2000). Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. *Cognitive Science*, (2), 249–298.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Berlin: Springer.
- Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. *Cognitive Science*, (12), 1–48.
- Klauer, K. J. (Ed.) (1993). *Kognitives Training*. Göttingen: Hogrefe.
- Leuders, T. (2012). Zahlen unter der Lupe. In S. Prediger, B. Barzel, S. Hußmann, & T. Leuders (Eds.), *mathewerkstatt 6*. Berlin: Cornelsen.

- Leuders, T., Naccarella, D., & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik*, Volume 32, Number 2, 205-231
- Leuders, T., & Philipp, K. (vor. 2012). Experimentelles Arbeiten in der Mathematik - ein Brückenschlag zur Naturwissenschaft mit Blick auf Peirce, Pólya und Medawar. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel, & N. Robin (Eds.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten*. Münster: Waxmann
- Mayring, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung: Eine Anleitung zu qualitativem Denken*. Weinheim: Beltz.
- Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument* (Vol. 52). Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics* (2. printing.). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3. ed.). Thousand Oaks, Calif.: Sage.
- Peirce, C. S., & Walther, E. (1967). *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Baden-Baden: Agis-Verl.
- Philipp, K. (vor. 2012). *Experimentelles Denken von Schülerinnen und Schülern im Fach Mathematik - Theoretische und empirische Konkretisierung einer fundamentalen Kompetenz*. Wiesbaden: Vieweg
- Philipp, K., & Leuders, T. (2010). Innermathematisches Experimentieren - Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (pp. 657–660). Münster: Martin Stein.
- Philipp, K., & Leuders, T. (2011). Experimentelles Denken fördern. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Münster: WTM-Verlag.
- Philipp, K., Matt, D., & Leuders, T. (2009). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (pp. 787–790). Münster: WTM-Verlag.
- Pólya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1).
- Schwätzer, U., Selter, C. (1998). Summen von Reihenfolgezahlen - Vorgehensweisen von Viertklässlern bei einer arithmetisch substantiellen Aufgabenstellung. *Journal für Mathematikdidaktik*, 19(2/3), 123–148.
- Stern, E. (1992). Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Eds.), *Lern- und Denkstrategien. Analyse und Intervention*. Göttingen: Hogrefe.
- Wittmann, E. C. (2005). Eine Leitlinie für die Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar-) Mathematik als Wissenschaft von Mustern. *Der Mathematikunterricht*, 51(2/3), 5–22.