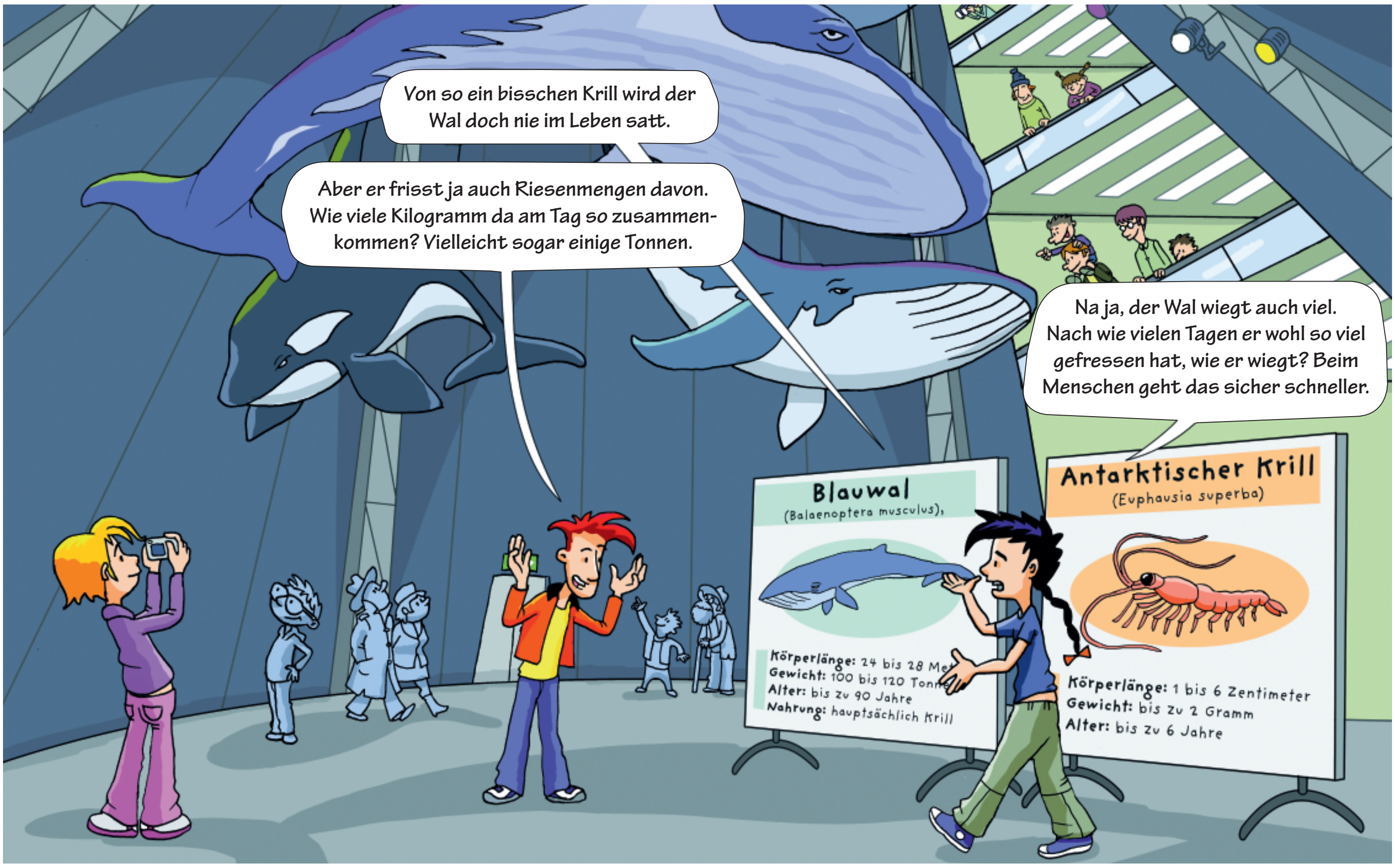


„Das macht Sinn!“

Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen

Timo Leuders, Stephan Hußmann, Bärbel Barzel, Susanne Prediger

Zu den großen Herausforderungen des Faches Mathematik gehört es, den Unterricht so zu gestalten, dass sich Schülerinnen und Schülern der Sinn ihres mathematischen Tuns erschließt. Der Artikel beschreibt didaktische Strukturelemente eines Konzepts, in dem sich verschiedene Ansätze der Sinnstiftung verbinden: Kontexte, Kernideen und geeignete Probleme für genetisches Mathematiklernen.

Sinnstiftung als didaktische Herausforderung

„Wozu soll ich das überhaupt lernen?“ Als Lehrerin oder Lehrer, egal welchen Faches, sollte man auf diese Sinnfrage der Schülerinnen und Schüler eine gute Antwort geben können. Aber eine gute Antwort, also eine glaubwürdige und lautere, ist mitunter nicht leicht zu finden. Denn die geläufigsten Antworten sind rundweg unbefriedigend: „Das gehört zum Allgemeinwissen“, „Damit kannst du dein logisches Denken schulen“ oder aber „Das brauchst du (später) im täglichen Leben“. Ehrlicher, wenn auch ernüchternd, sind diese Antworten: „Das brauchst du für eine gute Note in Mathematik“ oder „Das brauchst du, damit du in Klasse 11 weiter Mathematik machen kannst“. Ein solcher, rein instrumenteller Sinn kann weder Lernende noch die Lehrkräfte überzeugen, die sich ernsthaft auf die Sinnfrage einlassen wollen.

Wir halten dieses Problem für eine der zentralen didaktischen Herausforderungen und haben deshalb im Rahmen unserer Arbeit am Schulbuch *mathewerkstatt* für die Klassen 5 bis 10 intensiv daran gearbeitet. In diesem Heft wollen wir darstellen, aus welchen didaktischen Konzepten wir für unsere Ansätze zur Sinnstiftung gelernt haben und wie wir sie zu einem Gesamtkonzept für die Gestaltung sinnstiftender Lernsituationen verbunden und ausgeschärft haben. Die Beispiele in diesem einführenden Beitrag und in den weiteren Artikeln dieses Heftes sollen das Konzept und seine Strukturelemente mit Leben füllen und erste Einblicke geben, wie diese Form der Sinnstiftung für alle Inhalte der Sekundarstufe I realisiert wird.

Bereits Fischer und Malle (1985, S. 10 ff.) betonen, dass die Sinnfrage nicht global beantwortet werden kann, sondern für jeden einzelnen Lerninhalt bearbeitet werden muss, und beschreiben einige mögliche Wege. Die einflussreichsten Ideen, die in den letzten Jahrzehnten in der Frage der Sinnstiftung beschrieben wurden, sollen im Folgenden zu vier verschiedenen Ansätzen gebündelt und dargestellt werden (im Überblick im *Kasten 1*).

Ansätze zur Sinnstiftung

	Grundidee
Ansatz der Anwendungsorientierung (Blum 1985)	Schülerinnen und Schüler erleben die Nützlichkeit von Mathematik im alltäglichen Leben und in Kultur und Technik.
Ansatz des genetischen Lernens (Wagenschein 1968, Winter 1983, Freudenthal 1991)	Schülerinnen und Schüler entwickeln im Rahmen von Problemsituationen aktiv mathematische Konzepte, entdecken Zusammenhänge und erfahren dadurch Zwecke und Entstehungszusammenhänge der Konzepte.
Ansatz der fundamentalen Ideen (Bruner 1970, Tietze/Klika/Wolpers 1997)	Der Unterrichtsgang ist strukturiert nach den paradigmatischen Ideen und Prinzipien des Faches, die quer durch mathematische Themengebiete tragen und so eine sinnstiftende Orientierung bieten, z. B. die Idee des Messens.
Ansatz der Kernideen aus Vorschauperspektive (Gallin/Ruf 1994)	Der Lernprozess orientiert sich an den individuellen Ideen, die Lernende bei ihrer ersten Begegnung mit mathematikhaltigen Situationen entwickeln.

Kasten 1

Diese Ansätze sind nicht immer präzise voneinander zu trennen, sie haben untereinander manche Gemeinsamkeiten. Jeder dieser Ansätze leistet aber seine spezifischen Beiträge zur Sinnstiftung, die im Folgenden nacheinander und an konkreten Beispielen dargestellt werden sollen. Abschließend ergibt sich dann ein Bild, wie sich die verschiedenen Ansätze im Rahmen eines Gesamtkonzeptes miteinander verbinden und realisieren lassen.

Sinnstiftung durch Anwendungsorientierung

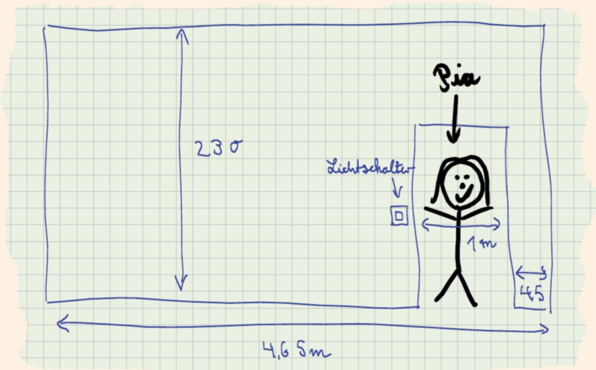
Seit vielen Jahren gibt es in Deutschland vielfältige Anstrengungen, den Mathematikunterricht durch authentische Anwendungsaufgaben zu bereichern, um die Rolle der Mathematik als umwelterschließendes Werkzeug präsenter zu machen, aber auch um die Motivation und das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler positiv zu beeinflussen (vgl. Kaiser 1995, Maaß/Leuders 2007). Die Frage „Wozu ist das gut?“ wird hierbei beantwortet mit: „Um folgende reale Situation zu bewältigen.“ Es ist ein Ergebnis dieser Anwendungsorientierung, dass sich die Zahl echter Anwendungsbezüge in Schulbüchern deutlich erhöht hat. *Abb. 1* zeigt eine Aufgabe zur Übung des Rechnens und Umformens von Längen in verschiedenen Einheiten, die diesem Ansatz entspricht (aus Barzel/Leuders 2012a).

Ein Regalsystem planen

Pia und ihre Schwester dürfen sich eine gemeinsame Bücherwand einrichten. Dafür wollen sie neue Regale kaufen. Sie haben eine Wand in ihrem Zimmer ausgemessen und eine Skizze gezeichnet. Nun möchten sie aus verschiedenen Regalteilen ein passendes Regal für die Wand zusammenstellen.

Welche Regale aus dem Regalsystem unten könnten Pia und ihre Schwester in das Zimmer stellen?

- Welche Maße hätte die Bücherwand insgesamt?
- Was würde alles zusammen kosten?



MÖBEL MILANO **REGALSYSTEME** Seite 32

	CD-Gestell BENVENUTO	Bücherregal CARLOS	Bücherregal GIOVANNI	Bücherregal ENRICO
Preis:	30,00 €	40,00 €	40,00 €	50,00 €
Breite:	20 cm	40 cm	80 cm	80 cm
Tiefe:	17 cm	28 cm	28 cm	28 cm
Höhe:	2,02 m	106 cm	106 cm	2,02 m

Abb. 1: Beispiel für eine anwendungsorientierte Übungsaufgabe im authentischen Kontext (Barzel/Leuders 2012a)

Natürlich können nicht alle Inhalte der Sekundarstufe I über Anwendungsbezüge erschlossen werden, weil einige Inhalte eher von innermathematischer Relevanz sind. Gleichwohl können Anwendungsbezüge nicht nur motivierende Einsprengsel bieten, sondern eine Funktion der lokalen Sinnstiftung erfüllen, sofern sie hinreichend authentisch sind.

Es entwickelte sich eine zunehmende Sensibilität gegenüber unglaubwürdigen Einkleidungen, die die lebensweltlichen Kontexte nicht ernst nehmen und Fragen stellen, die in diesen Kontexten niemand stellen würde (Jahnke 2005, Leuders/Leiß 2006). Wenn zu einem bestimmten Thema solche Kontexte in der realen Welt nicht zu finden sind, dann ist es authentischer, geeignete innermathematische Kontexte heranzuziehen. Auch in solchen innermathematischen Kontexten sollten dann die ablaufenden mathematischen Prozesse wie z. B. das Problemlösen oder Argumentieren auf authentische Weise ablaufen können (Leuders 2003).

Ein Kontext ist auch dann am glaubwürdigsten, wenn er nicht nur für eine einzelne Aufgabe herangezogen wird, sondern wenn er tragfähig genug ist, um langfristige Lernprozesse über mehrere Tage oder Wochen daran entlang zu organisieren.

Eine weitere Forderung an Kontexte ist, dass sie – so weit wie sinnvoll und möglich – an die Realitäten, Vorerfahrungen und Interessen der Lernenden anschließen und deren vorhandene Denk- und Handlungsmuster erweitern, so dass subjektive Relevanz erfahrbar wird. Zu dieser Lebenswelt zählen erlebte Situationen aus dem unmittelbaren oder medial erlebten Alltag der Lernenden. Aber auch konsolidierte Erfahrungen im Umgang mit Mathematik, wie z. B. die Vertrautheit mit den natürlichen Zahlen und den Grundrechenarten kann bereits als Lebenswelt angesehen und damit als innermathematischer Kontext genutzt werden (vgl. Lengnink 2005 und den Artikel von Leuders und Rülander in diesem Heft).

Für das Schulbuch *mathewerkstatt* haben wir daher entschieden, *jedes* Kapitel innerhalb eines Kontextes anzusiedeln, der durch die gesamte Erarbeitungsphase hindurch tragen und die in *Kasten 2* zusammengefassten Anforderungen an *sinnstiftende Kontexte* möglichst erfüllen soll.

Im Folgenden sollen einige solche sinnstiftende Kontexte stichwortartig vorgestellt werden. Die Beiträge in diesem Heft zeigen weitere Beispiele aus unserem Schulbuch. Manche haben sich bereits in anderen Lehrwerken als tragfähig erwiesen.

Eigenschaften sinnstiftender Kontexte

Ein *sinnstiftender Kontext* ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden *(Lebensweltbezug).*
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen *(Kontextauthentizität).*
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen *(Reichhaltigkeit).*

Kasten 2

Mathematisches Thema: Größenbereiche, insbesondere Längen und Gewichte, Messen
Kontext: Große und kleine Tiere im Vergleich (Barzel/Leuders 2012a)
Eigenschaften des Kontextes
Lebensweltbezug: Schülerinnen und Schüler der Unterstufe sind mit dem Kontext der Haus- und Wildtiere vertraut und haben in dem Alter großes Interesse an diesem Thema. Das direkte und indirekte Vergleichen von Größen gehört zu typischen Handlungsmustern der Lernenden.
Kontextauthentizität: In der Biologie, aber auch in der Haustierhaltung und -pflege, sind der Vergleich von Tieren anhand von Größen und das Messen relevante Handlungen.
Mathematische Authentizität: Das Messen als mathematisches Prinzip des Vergleichens überwindet das direkte oder indirekte Vergleichen und nutzt den Vergleich mit Einheiten bzw. sogar standardisierten Einheiten. Diese mathematische Idee lässt sich im Kontext explizit verwenden.

Mathematisches Thema: Koordinaten und Winkel
Kontext: Menschen und Tiere orientieren sich im Gelände (Hußmann et al. 2012)
Eigenschaften des Kontextes
Lebensweltbezug: Schülerinnen und Schüler nutzen im alltäglichen Leben immer wieder Landkarten und Stadtpläne, um die Lage von Orten zu beschreiben und zu kommunizieren.
Kontextauthentizität: In den vielen Bereichen der Navigation, ob zu Lande oder zu Wasser, bilden Koordinaten ein unabdingbares mathematisches Werkzeug. Orte auf der Welt mit Zahlen zu beschreiben ist eine in Alltag und Technik relevante Tätigkeit, ob nun in der Schifffahrt mit Winkeln und Längen, oder in den meisten anderen Bereichen mit Koordinaten.
Mathematische Authentizität: Orte im Raum mit Hilfe von Zahlen zu beschreiben, ist ein zentrales mathematisches Strukturierungsprinzip (Tietze u. a. 1997). Im hier vorgeschlagenen Kontext steht dieses Prinzip explizit im Zentrum des Interesses.

Beide Beispiele verwenden außermathematische Kontexte, um mathematische Begriffsentwicklung zu initiieren. Das bedeutet aber nicht, dass Kontexte *grundsätzlich* außermathematisch sein müssen.

Beispielsweise ist die Welt der natürlichen Zahlen für Lernende der Sekundarstufe ein so vertrauter Ausschnitt ihrer Lebenswelt, dass auf dieser Basis auch die Erarbeitung weitergehender mathematischer Konzepte und Zusammenhänge gelingt, wie z. B. der Primzahlbegriff und die Faktorisierung (Leuders 2012). Hier wäre es wenig zielführend und würde den Charakter des Gegenstandes verkennen, einen künstlichen außermathematischen Anwendungskontext zu bemühen. Leuders, Rülander und Marxer (in diesem Heft) stellen die Exploration von Zahlentricks als weiteren innermathematischen Kontext für die Erarbeitung der binomischen Formeln vor.

Entscheidend für einen Kontext ist also nicht sein inner- oder außermathematischer Charakter, sondern seine Eignung dafür, dass die Lernenden ihre inner- oder außermathematischen Fragen zum Gegenstand der aktiven Konzeptentwicklung machen können und sich damit – im Beispiel der binomischen Formeln – den Nutzen der algebraischen Beschreibung quadratischer Zusammenhänge erarbeiten können. So wichtig also tragfähige Kontexte für die sinnstiftende Erfahrung der Nützlichkeit sind, so deutlich stünde eine Reduktion von Sinnstiftung allein auf Anwendungsorientierung in der Gefahr, lediglich fertige mathematische Konzepte in Anwendungszusammenhängen zu zeigen („Angewandte Mathematik lernen“ statt „Mathematik in Anwendungen lernen“, ähnlich fordert es Freudenthal 1991).

Sinnstiftung durch genetisches Lernen

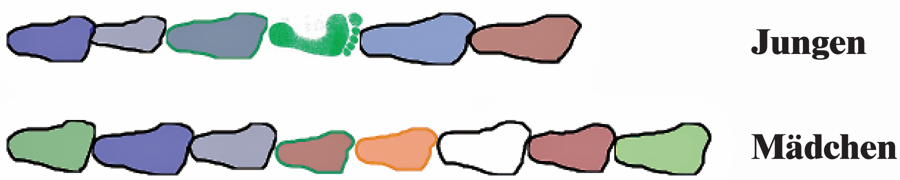
Im *genetischen Ansatz* (vgl. zweite Zeile in *Kasten 1*) wird Sinn gestiftet, indem Mathematik in ihren Entstehungszusammenhängen erlebbar wird. Die Frage, „Wozu ist das gut?" wird hier also beantwortet mit: „Dafür wurde das erfunden …". Ausgehend von der Beobachtung, dass sich die meisten mathematischen Begriffe und Sätze im Zuge der Bearbeitung spezifischer inner- oder außermathematischer Probleme historisch entwickelt haben (Wilder 1968), sollen sich im genetischen Ansatz auch *individuelle* Lernprozesse entlang einer natürlichen Genese eines mathematischen Begriffs entfalten. Zur Initiierung von genetischen Lernprozessen müssen daher Probleme gefunden werden, bei deren Bearbeitung mathematische Begriffe eigenständig nacherfunden und mathematische Zusammenhänge entdeckt werden (Wagenschein 1968, Winter 1983, Freudenthal 1991). Dabei kann die historische Begriffsgenese einen Anhaltspunkt für eine Begriffsentwicklung geben („historisch-genetisches Prinzip"). Wesentlicher ist aber, ob die dem Lernprozess zugrunde liegende Begriffsgenese für Lernende mit ihren spezifischen Lernvoraussetzungen *zugänglich* ist.

Ein Beispiel für einen solchen (nicht historisch-)genetischen Zugang zum Konzept des arithmetischen Mittels zeigt die Aufgabe in *Abb. 2*.

Wer hat die größeren Füße?

In der Klasse von Till und Merve hat eine Gruppe Mädchen und Jungen ihre Fußlängen gemessen und an die Tafel geschrieben.

So sehen die Füße der Kinder von oben aus:



a) Zu welchem Ergebnis kommt Till mit seinem Vorschlag?
b) Warum findet Merve Tills Vorschlag ungerecht?
c) Überlege dir einen Verbesserungsvorschlag: Wie kannst du herauszufinden, ob Mädchen oder Jungen in Till und Merves Klasse die größeren Füße haben?
d) Finde für deine Klasse heraus, ob bei euch Mädchen oder Jungen die größeren Füße haben. Hast du im Vergleich zu deiner Klasse eher kleine oder große Füße? Begründe deine Antwort.

Abb. 2: Ein Beispiel für ein genetisches Problem zur Erarbeitung des Mittelwerts (Barzel/Leuders 2012b)

Wer ist der schnellere Läufer?

Zwei 100-m-Läufer konkurrieren um die Teilnahme an einem Mannschaftswettbewerb. Im Training sind sie auf vergleichbaren Strecken die folgenden Zeiten (in Sekunden) gelaufen:

Läufer A	10,9	11,0	10,4	10,4	10,8	10,6	10,3	10,4
Läufer B	10,8	10,7	10,6	10,8	10,6	10,5	10,8	10,8

a) Welche Aussagen kannst du anhand der Daten über die Qualität der Läufer treffen?

b) Nach welchen Kriterien hast du dabei geschaut? Versuche, diesen Kriterien Namen zu geben.

c) Fertige eine Grafik an, an der du deine Kriterien verdeutlichst.

d) Wie würdest du dich als verantwortlicher Trainer entscheiden? Begründe deine Aussage.

Abb. 3: Ein anderer Kontext, ein anderes genetisches Problem, derselbe Kern (nach Lengnink 2009)

Statt den mathematischen Begriff des „Mittelwertes“ als fertiges Konzept an die Lernenden heranzutragen, können ihn die Schülerinnen und Schüler als Lösung zu einem Problem („Welche Gruppe hat die größeren Füße“) *selbsttätig* und *aktiv* entwickeln.

An diesem Beispiel kann man zudem erkennen, wie ein Kontext und ein konkretes Kontextproblem miteinander in Beziehung stehen. Hat man den Kontext „Ich und meine Klasse“ gewählt, so bietet das Kontextproblem „Welche Gruppe hat die größeren Füße?“ für die 5. Klasse einen genetischen Zugang zum Mittelwertkonzept. Bei Wahl eines anderen lebensweltlichen Kontexts, wie z. B. „Leistungsvergleiche im Sport“, hätte man hier auch eine andere Fragestellung zur Erarbeitung des Mittelwertbegriffes wählen müssen, wie das Beispiel für die 9. Klasse von Lengnink (2009) in *Abb. 3* zeigt, das hinsichtlich der hier entwickelbaren Begriffe noch reichhaltiger ist.

Der Vergleich beider Beispiele (*Abb. 2* und *3*) zeigt, wie genetische Probleme unterschiedlich weitgehend für die Nacherfindung vorstrukturiert sein können, ohne völlig offen formuliert sein zu müssen. Natürlich kann man die obigen Situationen auch ganz ohne fokussierende Aufgabenstellung an die Lernenden herantragen und sehen, welche Wege sie einschlagen. Oder man kann die Aufgaben im fragend-entwickelnden Klassengespräch erarbeiten. Diese unterschiedlichen methodischen Umsetzungen haben gleichwohl denselben fachdidaktischen Kern, nämlich die grundsätzlich genetische Entwicklung des Begriffs „arithmetisches Mittel“.

Sowohl die Kontexte zum Vergleich der Füße oder der Läufer als auch die Kontexte „Große und kleine Tiere im Vergleich“ und „Menschen und Tiere orientieren sich im Gelände“ stoßen Mathematisierungsprozesse an, die von lebensweltlichen Situationen ausgehen und in die Mathematik hineinführen. Diese Prozesse werden auch *horizontale Mathematisierungsprozesse* genannt (Freudenthal 1983). Der Kontext bietet einen Rahmen für die Entwicklung mathematischer Begriffe. Entscheidend dabei ist nicht allein, ob er eine authentische Anwendung von Mathematik repräsentiert, sondern ob er die Lernenden dazu anregt, auf der Basis ihrer außer- wie innermathematischen Erfahrungen Fragen zu stellen, die sie mit den ihnen verfügbaren Denk- und Handlungsmustern angehen können.

In innermathematischen Kontexten kann es aber auch sein, dass keine neuen Begriffe erarbeitet werden, sondern dass die bereits vertrauten mathematischen Konzepte zum Gegenstand einer Analyse werden. Hat man beispielsweise die Brüche erst einmal als Beschreibungsmittel für Anteile oder Verhältnisse in der Umwelt entdeckt, so lassen sich diese neu gewonnenen Objekte selbst in ihrer Struktur nun genauer analysieren. Dabei werden beispielsweise

- Zusammenhänge zu anderen mathematischen Objekten (z. B. Dezimalzahlen) aufgedeckt,
- die Möglichkeit der Übertragung der bereits bekannten Operationen exploriert oder
- nach einem Kalkül im Umgang mit den Objekten gesucht.

In diesen Fällen sprechen wir von so genannten *Strukturproblemen*. Die Mathematisierungsprozesse, die hier angestoßen werden, befassen sich also nicht mit dem Begriffsbilden, sondern dem Strukturieren, Kalkülbilden oder Verallgemeinern mathematischer Strukturen. Solche Mathematisierungsprozesse werden auch *vertikale Mathematisierungsprozesse* genannt (Freudenthal 1983). Wie der Übergang von Kontextproblemen zu Strukturproblemen aussieht, erläutern Prediger, Glade und Schmidt in ihrem Beitrag zum Vergleichen und Addieren von Brüchen. Weitere konkrete Beispiele für Kontext- und Strukturprobleme finden sich im Beitrag von Hußmann und Leuders in diesem Heft.

Typen von genetischen Problemen

Ein Problem wird als **genetisch** bezeichnet, wenn bei dessen Bearbeitung mathematische Begriffe eigenständig nacherfunden und mathematische Zusammenhänge entdeckt werden.

Ein **Kontextproblem** (in inner- oder außermathematischen Kontexten) initiiert einen Lernprozess in Form einer kontextbezogenen Mathematisierung, bei der Schülerinnen und Schüler im Verlauf ihrer Bearbeitung mathematische Begriffe als Werkzeug zur Lösung des Problems erfinden und weiterentwickeln.

Ein **Strukturproblem** zielt auf die Untersuchung struktureller Phänomene und die Gewinnung abstrakter mathematischer Konzepte oder Zusammenhänge. Es initiiert einen Lernprozess, bei dem die Schülerinnen und Schülern mathematische Zusammenhänge zwischen bestehenden Begriffen entdecken, systematisieren oder schematisieren.

Kasten 3

Die hier unterschiedenen Typen von Problemen, die sich für genetisches Lernen eignen, sind in *Kasten 3* zusammengefasst. Wesentliches gemeinsames Qualitätsmerkmal ist die authentische Weise, in der Schülerinnen und Schüler aktiv an der Entwicklung mathematischer Konzepte oder der Entdeckung von Zusammenhängen beteiligt sind.

Unterschiedliche Konzepte für Lernanlässe, in denen genetisches Lernen angeregt werden kann, gibt es bereits seit vielen Jahrzehnten: bei Wagenschein (1968) als „herausfordernde Fragen, bei Flewelling und Higginson (2003) als „Rich Learning Tasks“ oder bei dem Autorenkollektiv der Schweizer Schulbuchreihe „mathbu.ch“ (Affolter u. a. 2002 ff.) als „Lernumgebungen“.

Sinnstiftung durch Kernideen

Fundamentale Ideen

Zu den frühesten Versuchen, die Fachsystematik der Disziplin auf ihre sinnstiftende Struktur hin zu durchleuchten und so ein Curriculum zu entwickeln, das für Lehrende wie Lernende mehr ist als nur eine Sammlung von fachlichen Gegenständen, gehört Bruners Konzept der „fundamentalen Ideen“ (Bruner 1970). Sein Konzept wird heute als Konzept der „big ideas“ in den Versuchen einer Beschreibung mathematischer Bildung aus inhaltlicher Perspektive fortgeführt. Im Vordergrund stehen dabei die globalen Ideen wie „Ausschöpfung“, „Quantität“, „Invarianz“, „Iteration“ (Schreiber 1983), die zwar zur Stiftung von Kohärenz über mehrere Schuljahre hinweg geeignet scheinen, aber bislang wenig Wirkung für die Gestaltung konkreter Lernprozesse entfalten konnten (Vohns 2010). Damit solche globale Ideen auf lokaler Ebene in einem konkreten Lernprozess sinnstiftend wirken können, werden sie bereichsspezifisch konkretisiert, wie zum Beispiel die Idee der Größe. Neben den globalen Ideen nennen Tietze et al. (1997, S. 41) auch „bereichsspezifische Strategien“ (wie z. B. die Idee des Messens) als wichtige Varianten fundamentaler Ideen, die sich auf kleinere thematische Einheiten beziehen.

Kernideen in Vorschauperspektive

Einen völlig anderen ideenbezogenen Ansatz, der die lokalen Unterrichtsprozesse in den Blick nimmt, haben Gallin und Ruf (1994) in die Diskussion eingebracht. Sie arbeiten mit dem Konzept der *Kernidee*, welche stärker die „singuläre Perspektive“ des Individuums aufgreift und weniger die „reguläre Perspektive“ der fertigen Mathematik. Bei der Gestaltung von Lernprozessen erweist es sich als nützlich, zwischen der Vorschauperspektive des Lernenden und der Rückschauperspektive des bereits Kundigen zu unterscheiden. Nach Gallin und Ruf bringen Kernideen besonders die Vorschauperspektive zur Geltung, indem sie individuelle Ideen einbeziehen, die „das ganze Stoffgebiet in vagen Umrissen einfangen und als attraktives Gegenüber den Lernenden zum sachbezogenen Handeln herausfordern“. Kernideen repräsentieren „Hoffnungen, Wünsche, Erfahrungen, die sich zu Fixpunkten unserer persönlichen Orientierung verdichtet haben“. Eine Kernidee in diesem Sinn kann zum Beispiel lauten: „Für mich ist jede Rechnung eine Geschichte.“

Synthese zweier ideenbezogener Ansätze

Will man ein praktisches Unterrichtskonzept und ein systematisches Curriculum durchgängig an mathematischen Ideen orientieren, sodass diese als sinnstiftend im Rahmen von in sich geschlossenen Erarbeitungsprozessen im Unterricht wirken, so erscheinen die globalen fundamentalen Ideen zu fachorientiert, um von den Lernenden und Lehrenden explizit genutzt zu werden. Die Kernideen in der breiten und bewusst offenen Auffassung von Gallin und Ruf dagegen sind zu subjektiv und lokal, um ein systematisches Curriculum darauf zu gründen.

Dennoch enthalten beide Konzepte wesentliche Elemente, die für eine pragmatische Umsetzung geeignet erscheinen:

- Das Bruner'sche Ideenkonzept weist darauf hin, dass es nicht die Inhalte und die fachliche Systematik sind, sondern die dahinterliegenden Ideen, die das Denkgebäude der Mathematik tragen. Es kommt also nicht auf das Rechnen und Umwandeln von Größen an, sondern vielmehr auf die „Idee der Größe“, insofern sich Objekte der Umwelt indirekt mit Zahlen vergleichen lassen. Ebenso wenig kommt es auf das Verfahren des Messens mit Lineal und Geodreieck an, sondern auf die „Idee des Messens“ als Auslegen mit identischen Standardeinheiten. Solche globalen oder lokalen Ideen können sinnstiftende Funktionen für den Unterricht erfüllen.
- Wesentlicher Bestandteil des Ideenkonzeptes bei Ruf und Gallin ist die Fokussierung auf die „Vorschauperspektive“: Was hat Sinn für die Lernenden, die sich einem mathematischen Gebiet noch nicht genähert haben? Welche Fragen können sie anfangs tatsächlich stellen bzw. verstehen? Wie müssen insbesondere Ideen aus der Vorschauperspektive aussehen, damit sie für die Lernenden nicht nur End-, sondern auch Ausgangspunkt des Lernprozesses sein können?

Beide Konzepte – die der fundamentalen Idee aus Rückschauperspektive und der Kernideen aus Vorschauperspektive – haben wir im Rahmen der Arbeit an der *mathewerkstatt* für die Entwicklung praxistauglicher Unterrichtsgänge fruchtbar zu machen versucht. In der Auseinandersetzung mit der Frage, welche Kernideen für welches Unterrichsthema sinnstiftende Funktion übernehmen könnten, haben wir das Konzept Kernidee auf eine Weise weiterentwickelt, die sich unseres Erachtens für die Strukturierung von konkreten Unterrichtsmaterialien als nützlich erweist. Einige konkrete Umsetzungen für die gymnasiale Oberstufe findet man bei Hußmann (2003, „intentionale Probleme“) oder Leuders (2004, „Kernideen – Kernfragen – Kernprobleme“).

Eine **Kernidee** enthält subjektive *und* fachliche Aspekte zugleich und somit beide Perspektiven, die die Vorschau und die Rückschau bereits in sich tragen. Die beiden Aspekte zeigen sich aus der Vorschauperspektive als subjektiv plausible *Frage* an den Gegenstand und in der Rückschauperspektive als *Antwort*, formuliert mit den bis dahin erarbeiteten mathematischen Konzepten. Als Rückschauantwort beschreibt die Kernidee, was die Lernenden am Ende einer Lernepisode – in eigener Sprache durchaus etwas anders – formulieren könnten. In jedem Fall bietet sie der Lehrperson eine Perspektive, worauf die Arbeit im jeweiligen Kapitel zielt. Aus der Vorschauperspektive hingegen muss man aber fragen: Was sind die Fragen der Lernenden an den Lerngegenstand, an die mathematische Kernidee? Diese Doppelfunktion der Kernidee fasst *Kasten 4* (auf der nächsten Seite) noch einmal zusammen.

Indem die so definierte Kernidee sowohl die Vorschau-Fragen als auch die Rückschau-Antworten umfasst, kann sie den Begriff von Gallin und Ruf (1994) erweitern. Sie enthält Ausgangs- und Zielpunkt einer thematisch zusammenhängenden mathematischen Erarbeitungsphase (was im Schulbuch in der Regel einer Etappe in einem Kapitel entspricht).

Kernideen aus der Vorschau- und Rückschauperspektive

Eine **Kernidee** umfasst in ***Vorschauperspektive*** Fragen, die die Lernenden stellen können und berücksichtigt so die subjektbezogene Dimension der Sinnstiftung. Die Kernidee in Frageform schließt an individuelle Vorerfahrungen, Zielperspektiven, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden an und initiiert die Auseinandersetzung mit dem mathematischen Gegenstand in den Worten von Schülerinnen und Schülern:

- „Wie kann ich Dinge nach ihrer Größe vergleichen?“ oder
- „Wie viel bekommt jeder beim Aufteilen, wenn es nicht aufgeht?“

Die zu einer Kernidee gehörenden Fragen fokussieren in genetischer Perspektive konkrete zentrale Probleme, die letztlich zur Entwicklung der „Rückschauantworten“ der Kernidee führen.

Eine **Kernidee** beschreibt in der ***Rückschauperspektive*** den ideenbezogenen Kern einer längeren Lernepisode, hier z.B. zum mathematischen Thema „Größen“:

- „Man kann Dinge der Größe nach vergleichen, indem man sich etwas Bekanntes vorstellt und damit vergleicht“ oder
- „Um Situationen in den Griff zu bekommen, in denen das Teilen ohne Rest nicht geht, beschreibt man die Ergebnisse der Teilung mit Brüchen.“

Zur Kernidee gehört also die „Rückschauantwort“, in der eine allgemeine Problemstellung und die zu ihrer Bewältigung notwendigen mathematischen Konzepte benannt werden. Damit wird deutlich, dass eine Kernidee die *Zwecke* der Mathematisierungsprozesse und damit den Sinn der mathematischen Konzepte miterfasst.

Kasten 4

jedem Thema strukturieren helfen, die folgenden „Strukturelemente“ gewählt (vgl. *Abb. 4*):

- Ein sinnstiftender (inner- oder außermathematischer) *Kontext* stellt einen authentischen Rahmen für die Lernsituation dar; auf ihn kann während der Erarbeitung immer wieder zurückgegriffen werden. Der Kontext stellt damit einen unmittelbar eingängigen Anker und „roten Faden“ für die Lernenden dar.
- Eine *Kernidee* repräsentiert den inhaltlichen Kern des Kapitels. Sie kann eine oder mehrere (Vorschau-)Fragen umfassen, welche aus der Vorschauperspektive der Schülerinnen und Schüler den Lernprozess initiieren und zu (Rückschau-)Antworten hinführen, die die zugrundeliegenden Ideen, Prinzipien und den Stellenwert der zu lernenden mathematischen Begriffe, Verfahren und Zusammenhänge erfassen.
- Konkrete *Kontextprobleme* und *Strukturprobleme* ermöglichen eine möglichst eigenständige, genetische Erarbeitung der mathematischen Begriffe, Verfahren und Zusammenhänge durch horizontale und vertikale Mathematisierung.

Zusammenwirken der sinnstiftenden Strukturelemente

Unser Konzept zur Bearbeitung der Sinnfrage im Mathematikunterricht verfolgt den Anspruch, die vier dargestellten Ansätze zur Sinnstiftung sinnvoll miteinander zu verbinden. Dabei sprechen wir auch von „Sinnstiftung“, um deutlich zu machen, dass Unterrichtsmaterialien und -konzepte lediglich *Angebote* zur Sinnkonstruktion machen können, die jeweils individuell unterschiedlich genutzt werden (Maier 1991).

Dabei haben wir als fixe Elemente, die den Prozess des sinnstiftenden Lernens bei

Die konkrete Umsetzung der Strukturelemente, die Ausgestaltung des Kontextes und die Konkretisierung der Kernideen in Kontext- und Strukturprobleme sind in den nachfolgenden Artikeln an unterschiedlichen Themenbereichen exemplarisch dargestellt.

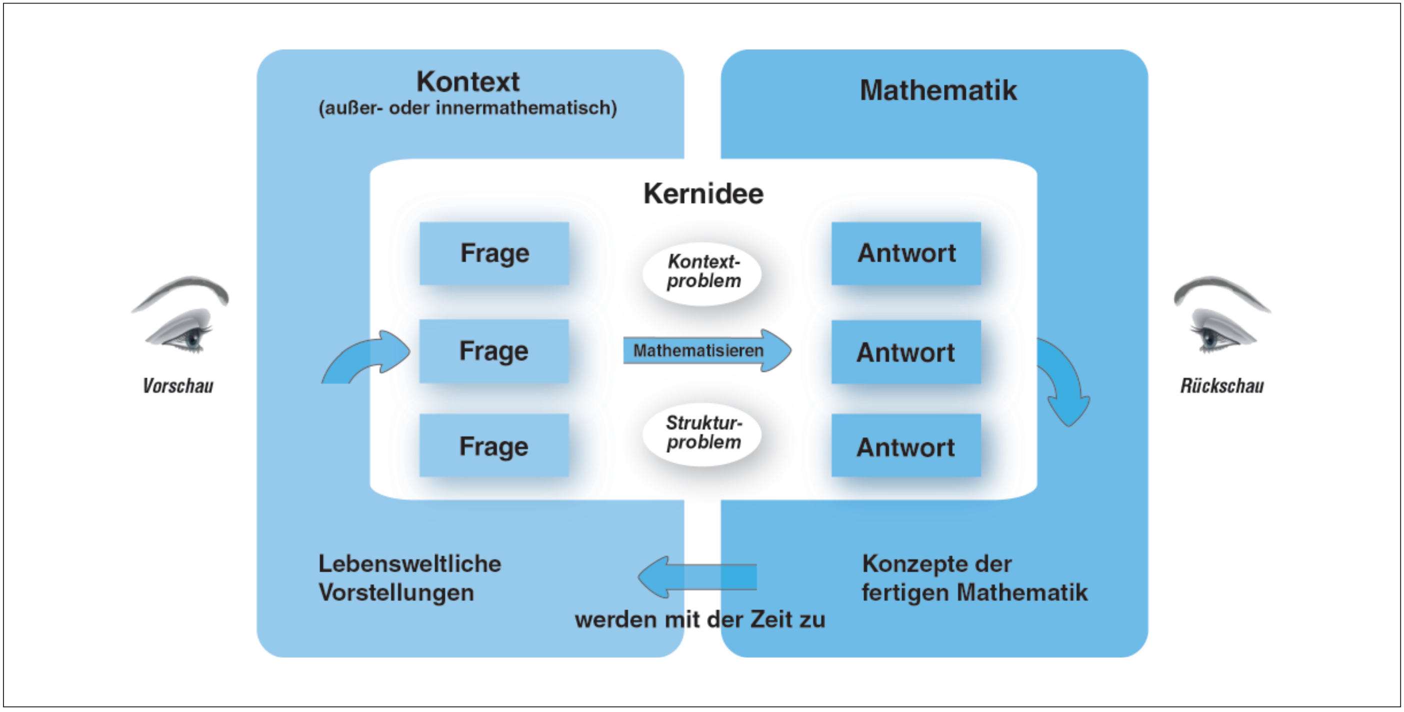


Abb. 4: Strukturelemente für sinnstiftendes Lernen

Literatur

Affolter, Werner / Beerli, Guido / Hurschler, Hanspeter / Jaggi, Beat / Jundt, Werner / Krummenacher, Rita / Nydegger, Annegret / Wälti, Beat / Wieland, Gregor / Wirth, Michael (2002): mathbu.ch. Bern: Klett

Barzel, Bärbel / Leuders, Timo (2012a): Zwerge und Riesen im Tierreich – Wie groß, wie lang, wie schwer?, erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin

Barzel, Bärbel / Leuders, Timo (2012b): Meine Klasse und ich – Zahlen sammeln und vergleichen, erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin

Blum, Werner (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. Mathematische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität, Kahle u. a. (Hrsg.), Band XXXII, Vandenhoeck &Ruprecht, Göttingen, S. 195–232

Bruner, Jerôme S. (1970): Der Prozess der Erziehung, Schwann, Düsseldorf 1970

Fischer, Roland / Malle, Günther (1985): Lokale, bedingte Sinn-Argumentation. In: dies.: Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien, S. 9–26

Flewelling, Gary / Higginson, William (2003): Teaching With Rich Learning Tasks: A Handbook: Centre for Mathematics, Science and Technology, Adelaide

Freudenthal, Hans (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht

Freudenthal, Hans (1991): Revisiting Mathematics Education. China Lectures, Kluwer, Dordrecht

Gallin, Peter / Ruf, Urs (1994): Ein Unterricht mit Kernideen und Reisetagebuch. In: Mathematik lehren 64, S. 51–57

Hußmann, Stephan (2003): Mathematik entdecken und erforschen – Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II. Cornelsen, Berlin

Hußmann, Stephan / Weber, Christoph (2012): Wie sich Menschen und Tiere orientieren – Orte finden und beschreiben, erscheint in Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin

Jahnke, Thomas (2005). Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker

Kaiser, Gabriele (1995) Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: Graumann, G. et al. (Eds.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Bd. 2. Hildesheim, Verlag Franzbecker, 1995, S. 66–84

Lengnink, Katja (2005): „Abhängigkeiten von Größen“ – zwischen Mathematikunterricht und Lebenswelt. Praxis der Mathematik in der Schule 2/05, S. 13–19

Lengnink, Katja (2009). Vorstellungen bilden: Zwischen Lebenswelt und Mathematik. In: Leuders, Timo / Hefendehl-Hebeker, Lisa / Weigand, Hans-Georg (Hrsg.): Mathemagische Momente, Cornelsen, Berlin, S. 120–129

Leuders, Timo (2003): Prozessorientierter Mathematikunterricht. In: Leuders, Timo (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Ein Praxishandbuch für die Sekundarstufe I & II. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 265–291

Leuders, Timo (2004): Kernideen für die Raumgeometrie. In: Der Mathematikunterricht (MU), Jg. 50, H. 3, S. 5–27

Leuders, Timo / Leiss, Dominik (2006). Realitätsbezüge. In: Blum, W. et al. (Hrsg.). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 194–206

Leuders, Timo (2012): Die 16 unter der Lupe – Zahlen zerlegen und erforschen. In: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 6. Cornelsen, Berlin

Maaß, Katja / Leuders, Timo (Hrsg.) (2007): Und man braucht sie doch! – Nützliche Mathematik. PM(49), 13

Maier, Hermann (1991): Verstehen als Prozess individueller Sinnkonstruktion. In: Mathematik lehren 49, S. 55–60

Schreiber, Alfred (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica, H. 6, S. 65–76

Tietze, Uwe-Peter / Klika, Manfred / Wolpers, Hans (1997) (Hrsg.): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis, Vieweg, Braunschweig

Vohns (2010): Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. Journal für Mathematik-Didaktik. Volume 31, Number 2, S. 227–255

Wagenschein, Martin (1968): Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch, Beltz, Weinheim

Wilder, Raymond L. (1968): Evolution of mathematical concepts.An elementary study, John Wiley and Sons, New York

Winter, Heinrich (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematikdidaktik 4 (3), S. 175–204

Verfasser

Prof. Dr. Timo Leuders
Institut für mathematische Bildung, Pädagogische Hochschule Freiburg,
leuders@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Stephan Hußmann
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
hussmann@math.uni-dortmund.de

Prof. Dr. Bärbel Barzel
Institut für mathematische Bildung, Pädagogische Hochschule Freiburg,
barzel@ph-freiburg.de

Prof. Dr. Susanne Prediger
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts, TU Dortmund
prediger@math.uni-dortmund.de

Alle Autorinnen und Autoren haben an diesem Beitrag gleichberechtigt mitgewirkt. Die meisten Unterrichtsideen in diesem Heft entstanden im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojekts KOSIMA (Kontexte sinnstiftenden Mathematikunterrichts, TU Dortmund – Hußmann/Prediger und PH Freiburg – Barzel/Leuders) und dem dabei entwickelten Schulbuch *mathewerkstatt.*