Vorfassung von

Leuders, T. & Philipp, K. (2012). Experimentelles Arbeiten in der Mathematik – ein Brückenschlag zur Naturwissenschaft mit Blick auf Peirce, Pólya und Medawar. In: Rieß, W., Wirtz, M., Barzel, B. (Hrsg). *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Theoretische Fundierung und empirische Befunde*. Münster: Waxmann. S.75-88

Experimentelles Arbeiten in der Mathematik – ein Brückenschlag zur Naturwissenschaft mit Blick auf Peirce, Pólya und Medawar

Timo Leuders & Kathleen Philipp

Mathematics is an experimental science. The formulation and testing of hypothesis play in mathematics a part not other than in chemistry, physics, astronomy, or botany. […] The only great point of divergence between mathematics and the other sciences lies in the […] circumstance that experience only whispers 'yes' or 'no' in reply to our questions, while logic shouts." (Wiener, 1923, S. 237)

1. Mathematik als experimentelle Wissenschaft?

Der amerikanische Mathematiker und Philosoph Norbert Wiener offenbart in seiner Abhandlung „On the nature of mathematical thinking" (Wiener, 1923) eine für diese Zeit eher unübliche Sicht auf die Mathematik als experimentelle Wissenschaft. Während das Experiment in den naturwissenschaftlich arbeitenden Disziplinen zu einem der zentralen Erkenntnisinstrumente zählt (Pietschmann, 1996; Shadish et al., 2002), verbindet man die Mathematik landläufig nicht mit experimentellen Denk- und Arbeitsweisen. Charakteristisch für mathematischen Erkenntnisgewinn ist vielmehr die Deduktion. Betrachtet man jedoch die Prozesse mathematischen Erkenntnisgewinns genauer, so finden sich viele Indizien für Vorgehensweisen, die man als „Beobachtung" oder „Experiment" charakterisieren könnte. Schon Euler (1751) schreibt:

> *Darum erscheint es ein wenig paradox, dass auch jener Teil der Mathematik, den man die reine Mathematik zu nennen pflegt, von Beobachtungen abhängt, welche gewöhnlich nur damit zusammengebracht werden, dass äußere Gegenstände auf unsere Sinne wirken. Weil nämlich Zahlen selbst sich einzig auf den reinen Intellekt beziehen, mag man kaum einsehen, dass Beobachtungen und Quasiexperimente geeignet sind, ihre Natur zu erkunden (Euler, 1751, S.76 Übersetzung: TL)*

George Pólya hat sich im ersten Band seines Buches „Mathematics and Plausible Reasoning" (Pólya, 1954) unter dem Titel „Induction and Analogy in Mathematics" ausführlich mit Struktur und Bedeutung induktiver Prozesse beim Erkenntnisprozess befasst. Bei seiner Analyse der Rolle von Beispielen unterscheidet er dabei den „suggestive contact", bei dem man durch Erzeugung von Beispielen und die Beobachtungen von Mustern zu mathematischen Vermutungen gelangt, und den „supporting contact", bei dem man anhand weiterer Beispiele die Plausibilität seiner Vermutungen überprüft und bei Erfolg erhöht. Man beachte hierbei die platonistische Rolle der Beispiele als „mathematische Realität", gleichsam als Bereich der dem Geist zugänglichen Phänomene einer mathematischen Welt. Auffallend ist die große Nähe der Pólya'schen Funktionen von Beispielen mit den epistemologischen Basisprozessen bei Peirce (Peirce & Walther, 1967; Peirce et al., 1960; Fann, 1970): Abduktion

(=suggestive contact) als Generierung von Hypothesen (also neuem, noch nicht abgesicherten Wissen) anhand von Beispielen und Induktion (=supporting contact) als Überprüfung der Plausibilität durch Betrachtung geeigneter Beispiele. Beispiele übernehmen hier also die Rolle einer „empirischen Welt“, auf die sich die mathematische Theoriebildung stützt (Eine nähere Analyse des beispielbasierten Vorgehens auf der Basis der Peirce'schen Kategorien findet sich bei Leuders et al., 2011 sowie bei Philipp & Leuders und Schulz & Wirtz, beide in diesem Band.)

Den hier anklingenden „quasi-empirischen“ Charakter mathematischen Tuns arbeitet auch Heintz (2000) heraus, wenn sie mit Mitteln der Soziologie die Arbeitsweisen von Mathematikerinnen und Mathematikern im "context of discovery" (Hoyningen-Huene, 1987) beschreibt: Mathematikerinnen und Mathematiker formen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge in der Regel nicht etwa durch Ableitung aus bestehenden Sätzen (deduktiv), sondern durch „experimentelles Arbeiten“ mit Beispielen, oder wie es im Rahmen ihrer Studie ein Mathematiker äußert:

> „*Die Grossen sind auch deshalb so gross [sic], weil sie so viel wissen. Sie kennen viele Beispiele und haben viel mit ihnen experimentiert. Darüber spricht man nicht. Man schreibt auch nicht in seinem Paper, wie man zu einer Vermutung gekommen ist. Was für immense Rechnungen manchmal dahinter stecken oder wie viele spezielle Beispiele*.“ (Heintz, 2000, S. 150)

Heintz (2000, S.110) stellt fest: „Damit rückt das Experiment, das praktische Forschungshandeln […] in den Mittelpunkt, […]“ Das Denken und Umgehen mit Beispielen bezeichnet Heintz in diesem Kontext als empirisch. Die Funktion der Beispiele ist hier vergleichbar mit der von Phänomenen der äußeren Welt in den empirischen Wissenschaften: Sie dienen dazu, Vertrauen in eine Vermutung zu gewinnen, sie auf ihre Plausibilität zu prüfen. Dieses „Hantieren mit mathematischem Material“ nennt Heintz „quasi-empirische Erfahrung“ (Heintz, 2000, S. 152) und beschreibt die Bedeutung von Beispielen auch als ein Art Labor oder Werkzeugkasten des Mathematikers.

Analysen, die auf Erfahrungsberichten und Introspektionen von aktiv Mathematiktreibenden oder soziologischen Analysen aus der Beobachtung des Wissenschaftsbetriebes resultieren, weisen darauf hin, dass es ein plausibles Unterfangen ist, „mathematische Experimente“ als Modi des Erkenntnisgewinns näher zu beschreiben und in Beziehung zu naturwissenschaftlichen Experimenten zu setzen (eine ausführliche Analyse findet sich bei Leuders & Philipp, i. Vorb.)

2. Typen von (mathematischen) Experimenten

Da der Experimentbegriff, wie er über verschiedene Disziplinen hinweg verwendet wird, ein sehr breiter ist, und die Erkenntnisprozesse, welche als „experimentell“ bezeichnet werden, durchaus unterschiedlichen Charakter haben, ist es angeraten, zunächst eine Einteilung von Experimenttypen vorzunehmen. Eine domänenübergreifende Typologie, die diese unterschiedlichen Qualitäten prägnant abbildet, hat der britische Biologe und Nobelpreisträger Peter Brian Medawar in seiner Schrift „Induction and Intuition in Scientific Thought“ (Medawar 1969; gewissermaßen ein Pendant zu Pólyas Schrift von 1954) herausgearbeitet und mit prägnanten Namen aus der Wissenschaftsgeschichte verbunden. Sie werden im Folgenden referiert und bereits auf experimentelle Prozesse in der Domäne Mathematik bezogen.

Baconsche Experimente: Hierbei handelt es sich um explorative Untersuchungen von Phänomenen mit dem Ziel des Auffindens von Zusammenhängen, der Generierung neuen Wissens. In der Mathematik sind solche Phänomene durch Beispiele, also durch konkrete mathematische Situationen mit

„beobachtbaren“ Eigenschaften gegeben. Auf welche Weise diese Beispiele erzeugt werden, ob etwa durch Analogie, durch systematische Variation oder durch intuitives Manipulieren ist dabei weniger relevant als die Tatsache, dass sie einen „suggesting contact“ (Pólya, 1954) zum Phänomenbereich herstellen sollen. Steinle (2005) bezeichnet diesen Modus als „exploratives Experiment“ und beschreibt disziplinunabhängig charakteristische Vorgehensweisen.

Im 20. Jahrhundert bildete sich eine Bewegung, die sich als „experimentelle Mathematik“ bezeichnet (Epstein & Levy, 1995) und die sich ebenfalls auf die Bedeutung induktiver Prozesse beim mathematischen Erkenntnisgewinn beruft: „Should we give the impression that the best mathematics is some sort of magic conjured out of thin air by extraordinary people when it is actually the result of hard work and of intuition built on the study of many special cases?“ (Epstein & Levy 1995, S. 670). Einige Mathematiker (z.B. Zeilberger, 1993) gründen sowohl ihre alltägliche Forschungspragmatik – das Erzeugen und Überprüfen von Vermutungen vor allem mit Computerhilfe – als auch ihre wissenschaftstheoretische Grundposition auf die Kraft von Induktion und Abduktion.

Kantsche Experimente: Dies sind reine Gedankenexperimente, in denen allein durch das logische Spiel mit den Voraussetzungen unserer Erkenntnis neue Einsichten entstehen können. Ein solches Experiment fußt stark auf Deduktion, das Neue entsteht durch die bewusste Abwandlung der Voraussetzungen. In der Naturwissenschaft finden solche Experimente bei der Entwicklung neuer mathematischer Modelle oder Theorien statt. In der Mathematik konstituiert sich diese Experimentform in Erkenntnisprozessen, die im Kleinen beispielsweise von der Variation einzelner Voraussetzungen in mathematischen Definitionen oder im Großen von der Exploration von Axiomensystemen ausgehen (z.B. bei der Gewinnung nicht-euklidischer Geometrien) – in der Mathematik könnte man daher diesen Experimenttyp mit Fug und Recht auch als „Hilbertsche Experimente“ (vgl. z.B. Davis & Hersh, 1999, S. 339 ff) bezeichnen.

Galileische Experimente: Dieser Experimenttyp ist der in den empirisch arbeitenden Wissenschaften dominierende und dient der Absicherung von Wissen im falsifikationistischen Ansatz, wie ihn Karl Popper in seinem kritischen Rationalismus herausarbeitete (Popper, 1963). In dieser Tradition bildete hat sich eine methodische Hochform des Experimentes heraus, das durch Variablenkontrolle, Randomisierung, und wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung das Problem der Verallgemeinerbarkeit des Einzelexperiments (Induktionsproblem) angeht. Der dahinter stehende Prozess der Prüfung einer Hypothese am Beispiel (und nur diesen Schritt und nicht etwa die Gewinnung der Hypothese bezeichnet Peirce (Peirce et al., 1960) als „Induktion“) ist, auch präsent in Prozessen *mathematischen* Erkenntnisgewinns. Die Prüfung an einer großen Zahl von Beispielen, an generischen Beispielen oder an Extrembeispielen dient der Steigerung der Plausibilität (bei nichtgelingender Widerlegung), und wird von Pólya als „supporting contact“ bezeichnet. Sogar das Argument, dass die Stärke des Plausibilitätsgewinns von der Qualität der Beispiele abhängt, ist in Naturwissenschaft und Mathematik analog: Die Aufgabe des Wissenschaftlers besteht gerade darin, möglichst *kritische* Beispiele zu wählen, er muss temporär als der stärkste Widersacher seiner eigenen Theorien auftreten. Erst nach einer solchen Phase experimentellen Arbeitens scheiden sich die Wege von Mathematik und Naturwissenschaften, da letzteren jenseits des kritischen Experiments keine Möglichkeiten einer deduktiven Absicherung zur Verfügung stehen.

Aristotelische Experimente: Der Vollständigkeit halber sei noch dieser vierte Experimenttyp genannt, der nicht dem Prozess der Gewinnung wissenschaftlichen Wissens dient, sondern der Erklärung und Veranschaulichung von Zusammenhängen an besonders prägnanten Beispielen, also letztlich der

Förderung des Wissenserwerbs bei einzelnen Individuen. Das aristotelische Experiment ist somit eher von pädagogischem oder didaktischem Charakter und entspricht in etwa dem, was in den Fachdidaktiken als „Demonstrationsexperiment“ bezeichnet wird. Aristotelische Experimente kann man in der Mathematik dazu verwenden, um den Aufbau von Begriffen zu fördern, insbesondere dann, wenn durch die Exploration von Beispielen mathematische Zusammenhänge besonders anschaulich werden. Dies ist z.B. der Fall bei der dynamischen Repräsentation von ganzen Beispielgruppen, wie es in der dynamischen Geometrie möglich ist. Hier wird der Computer zum Träger interaktiv manipulierbarer mathematischer Beispielräume (Barzel et al., 2005). Bei Ganter und Barzel (in diesem Band) werden solche mathematischen Experimente an physisch zugänglichen Objekten durchgeführt. Die Interaktion mit der Mathematik wird im Wortsinn „begreifend“.

3. (Mathematisches) Experimentieren als Zyklus kognitiver Prozesse

Die hier genannten vier Kategorien von Experimenten suggerieren mit ihren Bezeichnungen, dass es sich um Typen wissenschaftlichen Arbeitens handelt, um ausdifferenzierte Prozesse in der Wissenschaftspraxis. Als solche beschreiben sie die epistemologische Qualität von übergreifenden Phasen im Erkenntnisprozess („context of discovery“, vgl. Heintz, 2000) oder Arbeitsweisen von Teildisziplinen („experimentelle Mathematik“).

Man kann sie andererseits auch enger und zugleich abstrakter als Typen abgrenzbarer, elementarer wissenschaftlicher „Denkhandlungen“ auffassen. Als solche lassen sie sich zur Beschreibung von Schritten in konkreten Erkenntnisprozessen individueller Wissenschaftler, ja sogar von Mathematiklernenden verwenden (Leuders et al., 2011). Damit rücken die Experimentierkategorien in die Nähe dreier fundamentaler Formen wissenschaftlichen Schließens bei Peirce (Peirce et al., 1960; Richter 1995; Meyer 2007). Offensichtlich geworden ist dies bereits durch die Nähe der Experimenttypen „Baconsches Experiment“ und „Galileisches Experiment“ zu den jeweiligen Erkenntnisfunktionen der „Abduktion“ und „Induktion“. Will man auch die „Deduktion“ integrieren, so spielt diese auf zwei Ebenen eine Rolle: Zum einen in Form „deduktiver Zwischenschritte“ (Meyer, 2007), die beispielsweise nötig sind, wenn aus einer Vermutung (Theorie) zum Zwecke der Überprüfung erst Aussagen abgeleitet werden müssen. Zum zweiten hat die Deduktion in der Mathematik – und hier endet die Analogie zwischen Mathematik und Naturwissenschaften – die Funktion der Absicherung, wie sie in der Mathematik letztendlich immer verlangt wird.

Nicht nur die Typen von Experimenten, auch deren Abfolge lässt sich sowohl aus der Perspektive wissenschaftlicher Prozesse im Großen und elementarer Denkhandlungen im Kleinen betrachten. In der Realität der Forschung spielen sich diese Prozesse – jedenfalls in idealisierender Sicht – in Form von Zyklen des Erkenntnisgewinns ab.

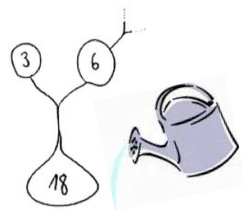
Im Großen bedeutet dies ein Abwechseln zwischen „exploratorischen (Bacon’sche) Experimenten“ und „konfirmatorischen (Galileischen) Experimenten“ (vgl. Beitrag von Schulz et al., in diesem Band). Dass man die zyklische Deutung des Erkenntnisgewinns mittels Abduktion und Induktion *auch im Kleinen* auf kognitive Prozesse beziehen kann, zeigt das Modell von Klahr und Dunbar (1988) zur „scientific discovery as dual search“ (SDDS). Auf der Basis dieses Modells lassen sich auch individuelle Erkenntnisprozesse als Abfolge kognitiver Suchprozesse in einem Hypothesensuchraum und einem Experimentesuchraum auffassen (vgl. Philipp & Leuders, in diesem Band). Lernende gelangen zu Erkenntnissen über eine gewissen Phänomenbereich, indem sie immer wieder Hypothesen aufstellen und diese durch „Experimente“ überprüfen. Der Experimentraum ist dabei ein vom forschenden Individuum gestalteter: In der Naturwissenschaft lässt er sich als Raum aller möglichen (systematischen) Prüfhandlungen in der Außenwelt auffassen. In der Mathematik besteht dieser Raum aus den möglichen Prüfhandlungen durch Generierung von Beispielen. Ähnlich wie bei naturwissenschaftlichen Experimenten kann sich dieser prüfende Zugriff auf den Phänomenraum unterschiedlich direkt gestalten. Im einfachsten Fall ist die Generierung eines Beispiels bereits die Prüfhandlung, in komplexeren Fällen benötigt die passende Konstruktion des Beispiels ähnlich systematische Vorbereitung wie die Planung eines naturwissenschaftlichen Experimentes[1].

Dieser Charakter des „quasi-empirischen" Experiments in der Mathematik soll nachfolgend durch eine systematische Gegenüberstellung mit der bereits angedeuteten Hochform des Experimentes, wie es in den Naturwissenschaften, der Psychologie oder der Medizin gelehrt und praktiziert wird, ausgeschärft werden. Dabei soll noch einmal plausibel gemacht werden, dass das „mathematische Experiment" nicht nur eine schwache Metapher, sondern eine starke strukturelle Analogie zum „naturwissenschaftlichen Experiment" darstellt. Als Vergleichsgrundlage wählen wir die Beschreibung des Experimentierens in einem umfassenden Zyklus des Erkenntnisgewinns (vgl. Schulz & Wirtz, in diesem Band).

Als konkretisierendes Beispiel für einen mathematischen Erkenntnisprozess beziehen wir uns auf Schritte in Schülerbearbeitungen im Rahmen der Aufgabe „Zahlenbäume" in Abbildung 5.1 (vgl Leuders, 2008). Eine hiermit verwandte Analyse eines mathematischen Erkenntnisprozesses aus dem Bereich der Zahlentheorie bei Euler findet man bei Pólya (1954) und Leuders & Philipp (i. Vorb.).

Abbildung 5.1: Aufgabe Zahlenbäume

Jedes Mal, wenn man einen Zahlenbaum gießt, wachsen aus einer Zahl zwei Zahlen. Das Produkt der beiden neuen Zahlen ist immer genau die Zahl, aus der sie gewachsen sind. Versuche so viel wie möglich über solche Zahlenbäume herauszubekommen.



Die Beschäftigung mit solchen Zahlenbäumen initiiert bei den Lernenden die genetische Konstruktion mathematischer Konzepte und die Entdeckung mathematischer Zusammenhänge. Im ersten Schritt finden sie, dass alle Bäume immer wieder bei den gleichen Zahlen enden: 2,3,5,7 etc. und bilden so das Konzept der Primzahl als multiplikative Grundbausteine der natürlichen Zahlen aus. Im zweiten Schritt entdecken sie, dass man zu einer festen Zahl zwar unterschiedlich aussehende Zahlenbäume finden kann, die aber alle bei denselben Zahlen enden. Sie entdecken so die Möglichkeit einer Primfaktorzerlegung und erkennen deren Eindeutigkeit. (Der deduktive Beweis der Eindeutigkeit ist ein tiefliegender Satz über natürliche Zahlen, der im schulischen Rahmen nicht geführt werden kann.). Diese Aufgabenstellung konstituiert einen mathematischen Phänomenbereich, der in hohem Maße ein exploratives und experimentelles Arbeiten der Lernenden ermöglicht.

[1] In der Mathematik kann man zudem der Auffassung sein, dass der untersuchte Phänomenraum nicht außerhalb des Forschenden liegt, sondern sein eigenes geistiges Konstrukt ist. Diese Unterscheidung zwischen Mathematik und Naturwissenschaft ist allerdings eine ontologische (Ist Mathematik Konstruktion oder Erfindung? Welchen Ort hat die platonische Ideenwelt der Mathematik?) und ist von den hier durchgeführten epistemologischen Betrachtungen abzutrennen.

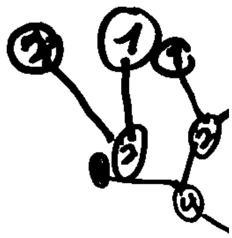
Die folgenden Ausschnitte einer Bearbeitung der Aufgabe durch ein Schülerpaar der vierten Jahrgangsstufe sollen einen Einblick in die hierbei erkennbaren experimentellen Erkenntnisprozesse ermöglichen. Das Beispiel dient hier vor allem zur Illustration der nachfolgend ausgeführten Gegenüberstellung naturwissenschaftlichen und mathematischen Experimentierens.

Es werden Schülerprodukte und sich darauf beziehende Aussagen dargestellt. Zu beachten ist hierbei, dass Schülerinnen und Schüler in dieser Jahrgangsstufe noch nicht über den Begriff der Primzahl verfügen.

(1) Die beiden Schüler legen fest, dass Zahlenbäume nicht weiter „gegossen" werden, wenn bei der Zerlegung die Zahl 1 als Faktor auftaucht (vgl. Abb. 5.2).

S1: Aber da macht man immer wieder dasselbe, das ist dann auch langweilig (zeigt auf die 2).

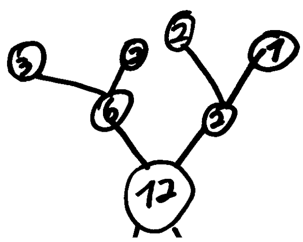
Abbildung 5.2: Zahlenbaum mit Zerlegungsfaktor 1



(2) Das Vertauschen derselben Faktoren wird nicht als „anderer" Baum akzeptiert (vgl. Abb. 5.3).

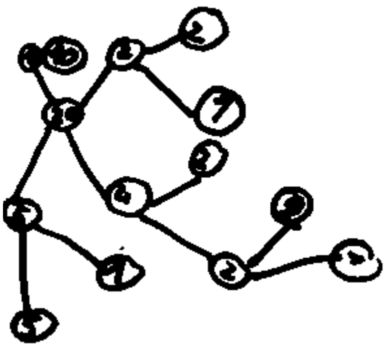
S1: 6 und 2 haben wir schon.

Abbildung 5.3: Zahlenbaum zur Zahl 12



(3) Es werden verschiedene Bäume zur jeweils gleichen Zahl erzeugt. Dabei werden verschiedene Zahlen gewählt, beispielweise die 20 (vgl. Abb. 5.4).

Abbildung 5.4: Verschiedene Zahlenbäume zur Zahl 20



(4) Die Schüler schlagen einen anderen Weg ein, der durch eine Beobachtung an den bisher generierten Zahlenbäumen bedingt ist und äußern gleich zwei Vermutungen.

> *S1: […] (zeigt auf Beispiel) bei geraden Zahlen sind meist die Zweier drin.*
> *S2: Ja.*
> *S1: Bei ungeraden eher die Dreier oder die Fünfer.*

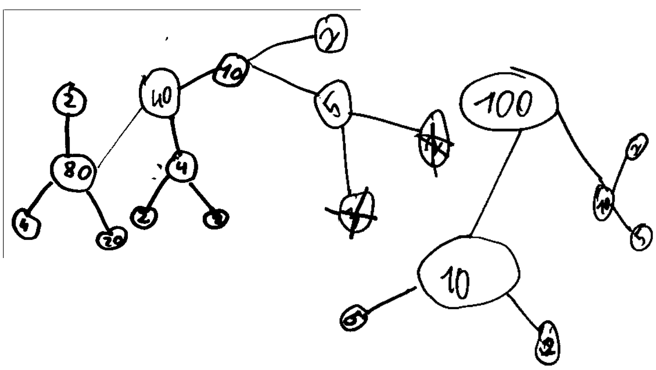
(5) Die Eigenschaft „gerade" wird nun konstant gehalten, während die Zahlenbeispiele variiert werden. In einem zweiten Schritt untersuchen die Schüler später ungerade Zahlen.

(6) Passende Beispiele werden betrachtet.

> *S1: Zum Beispiel (lacht) mach mir mal eine hoch, 80.*

(7) Steckt in allen geraden Zahlen der Faktor 2? Als Beurteilungsbasis werden auch bereits generierte Beispiele herangezogen: 12, 16, 40, 60, 80, 100 (vgl. Abb. 5.5).

Abbildung 5.5: Verschiedene Zahlenbäume
zu geraden Zahlen, hier zu den Zahlen 40 und 100



(8) Ergebnisse werden analysiert: Wurden hinreichend unterschiedliche Beispiele betrachtet?

An diesem Ausschnitt aus einer Experimentierphase erkennt man bereits, dass sich die Experimentierhandlungen in der Praxis sehr intuitiv und nicht unbedingt strukturiert vollziehen. Gerade im Grundschulalter vermischen sich wie in diesem Beispiel die Phasen der Überprüfung einer Vermutung und der Ergebnisinterpretation. So wurden hier beispielsweise bereits beim Generieren von Beispielen mit geraden Zahlen darauf geachtet, dass sie unterschiedlich groß sind (vgl Schritt (6)).

Zur Verdeutlichung der Reichweite der Analogie zwischen dem Experimentieren in der Mathematik und dem Experimentieren in den Naturwissenschaften werden im Folgenden wesentliche Teilschritte des Experimentierens in den Disziplinen verglichen und durch Bezug zur oben dargestellten Schülerbearbeitung illustriert. Eine vertiefte Analyse der Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schüler bei einer Reihe verschiedener Aufgaben vgl. die detaillierte Prozessstudie von Leuders, Naccarella und Philipp (2011). Für eine ähnliche Analyse von Experimentierprozessen bei einem Mathematiker verweisen wir auf Pólya (1954) und Leuders & Philipp (i. Vorb.)

Experimentieren in den empirischen Wissenschaften	**Quasi-empirisches Experimentieren in der Mathematik** *(Die Beispiele und die Ziffern (1) – (8) beziehen sich auf die weiter oben dargestellten Auszüge). Die eckigen Klammern [1]-[23] benennen die Vorgehensweisen nach Leuders, Naccarella & Philipp (2011)*
Den interessierenden Phänomenbereich eingrenzen, Werkzeuge zur Beschreibung des Bereiches sammeln bzw. anpassen (Definitionen, Operationalisierungen, Messverfahren)	Den interessierenden Phänomenbereich eingrenzen, Definitionen zur Beschreibung des Bereiches sammeln bzw. anpassen, *z.B. (1) Ausschließen der 1 als Zerlegungsfaktor [20,22]*

Hier wird implizit angenommen, dass mathematische Phänomene einen ähnlichen überindividuellen Realitätscharakter besitzen – dies ist die „Arbeitshypothese" des Mathematikers in seiner täglichen Arbeit. Insbesondere Schülerinnen und Schülern dient diese Phase zu einer ersten Orientierung im Problemraum.

Bestehende Theorien danach ausloten, welche Zusammenhänge sie bereits vorhersagen bzw. erklären können	Bestehende Theorien zum Bereich ausloten, *z.B. (2) Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$ zur Durchführung ausnutzen [19]*

Eine Theorie ist z.B. ein logischer Zusammenhang: „Wenn... dann..." oder ein funktionaler/stochastischer Zusammenhang: „x hängt von y auf diese Weise ab....". Das Ausloten hat deduktiven Charakter und entspricht am ehesten dem Kantschen Experiment. Häufig werden solche theoretischen Aspekte von Schülern nicht explizit geäußert.

Den Phänomenbereich explorieren, durch systematische Variation Phänomene erzeugen, interessante Variablen identifizieren	Den Phänomenbereich explorieren, durch systematische Variation Beispiele erzeugen, interessante Variablen identifizieren *z.B. (3) Verschiedene Bäume zur gleichen Zahl erzeugen [11-17, 19, 21, 22, 23]*

Dies ist der Kern des explorativen, Baconschen Experimentes: Solange die Zusammenhänge im Phänomenbereich noch nicht offen liegen, werden Phänomene generiert und auf systematische Zusammenhänge hin untersucht. Sofern sich die Generierung durch mehr oder weniger systematische Variation bestimmter Variablen vollzieht, verdichten sich Vermutungen darüber, welche (unabhängige) Variablen besonders relevanten Einfluss haben und welche (abhängigen) Variablen besonders sensitiv reagieren. Die hierbei nötige Kompetenz des Erkennens von Mustern und Strukturen ist eine Fähigkeit, die einen curricularen Kern vorschulischer und schulischer mathematischer Förderung darstellt.

Hypothesen über einen kausalen Zusammenhang der Variablen aufstellen, ggf. den Zusammenhang mathematisieren	Hypothesen über einen mathematischen Zusammenhang aufstellen *z.B. (4) In geraden Zahlen steckt der (Prim-)Faktor 2.* [1-6]

Die hypothetisierten Zusammenhänge können deterministisch oder stochastisch sein. In den empirischen Wissenschaften müssen die zugrundeliegenden Variablen erst explizit mathematisch modelliert werden. In den Naturwissenschaften ist eine Variable in der Regel eine physikalische Messgröße. In der Psychologie bedeutet es einen besonderen Aufwand, Konstrukte und passende Messgrößen zu erarbeiten und empirisch abzusichern. In der Mathematik liegt die Variable bereits mathematisiert vor. Dennoch ist nicht evident, *welche* Variable für ein Phänomen entscheidend ist. Das Beispiel zeigt auch, dass Variablen nicht unbedingt metrische Größen sein müssen, sondern auch kategoriale Variablen, wie z.B. die Parität („gerade-ungerade“) sein können.

Ein Experiment planen: relevante unabhängige Variablen zur Variation festlegen, weitere Variablen kontrollieren (fixieren, randomisieren)	Die Überprüfung der Hypothese an Beispielen planen: relevante Variable und deren Variation identifizieren, *z.B. (5) Planen, gerade Zahlen (unabhängige Variable) zu generieren und deren Endzahlen (abhängige Variablen) zu betrachten.* [8, 9, 19, 22, 23]

In den empirischen Wissenschaften ist die Aufklärung von *Kausalität* zwischen Variablen ein wesentliches Ziel des experimentellen Vorgehens. In der Mathematik ist dies weniger gravierend, weil ja die Absicherung des vermuteten Zusammenhangs von Variablen aus einer späteren deduktiven Behandlung folgt. Die Untersuchung, inwiefern verschiedene experimentell gewonnene Implikationen möglicherweise auch in ihrer Umkehrung gelten, ist in der Mathematik auch unabhängig von einer Ursache-Wirkungs-Annahme in einem naturwissenschaftlichen Zusammenhang. In beiden Bereichen ist aber die Identifikation der relevanten Variable für die Aussagekraft eines Experimentes entscheidend. Wählt man unpassende unabhängige oder abhängige Variablen, so kann das Ergebnis ausbleiben oder keine Aussagekraft für die Hypothese besitzen. Auch im mathematischen Experiment kann es beispielsweise geschehen, dass man eine mit anderen Variablen konfundierende unabhängige Variable wählt, indem man nur Fälle in einem systematisch eingeschränkten Beispielraum betrachtet (z.B. nur gerade Zahlen).

Das Experiment durchführen, Rahmenbedingungen konstant halten, Daten über die unabhängige und abhängige Variable erfassen	Beispiele erzeugen und Ergebnisse/ Konsequenzen bestimmen *z.B. (6) Bäume entsprechend dem Plan generieren* [8, 9, 11-17]

Der Vorgang des Durchführens ist in der Mathematik oft unproblematischer, insbesondere weil der Raum der unbetrachteten Variablen (z.B. Temperatur) in der Regel keiner besonderen „technischen“ Kontrolle bedarf. Man findet bei Schülerinnen und Schülern auch kaum explizite verbale Hinweise darauf, wie bewusst die Identifikation der unabhängigen und abhängigen Variablen vollzogen wurde. Dennoch ist auch beim mathematischen experimentellen Arbeiten die Konzentration auf die relevanten Variablen („Was ändere ich? Was beobachte ich?“) entscheidend dafür, wie reichhaltig, bedeutsam und sicher die Ergebnisse der experimentellen Phase sind. Wenn man durch das Experiment beispielsweise keine Gegenbeispiele findet, lohnt der Versuch eines deduktiven Beweises. Misslingt dieser, könnte es unter Umständen an den mangelhaft definierten Voraussetzungen liegen, sprich gerade an der mangelnden Variablenkontrolle bzw. der mangelhaften Identifikation relevanter Randbedingungen.

Die Konformität der Daten mit der Hypothese überprüfen, *z.B. durch inferenzstatistische Auswertung im Kontrollgruppendesign*	Die Konformität des Ergebnisses mit der Hypothese überprüfen *z.B. (7) Steckt in allen geraden Zahlen der Faktor 2? [7,10]*

Dies ist sowohl in den Naturwissenschaften als auch in der Mathematik der kritische Schritt des Galileischen Experimentes, das Resultat der prüfenden Induktion. Bei komplexen Experimenten (Psychologie, Hochenergiephysik) kann der Weg von den Daten bis zur Hypothesenprüfung ein komplexer sein.

Das Ergebnis analysieren: Hat sich die Plausibilität der Hypothese erhöht? Habe ich ggf. entscheidende Variablen vergessen?	Das Ergebnis analysieren: Hat sich die Plausibilität der Hypothese erhöht? Prüfen, ob ggf. entscheidende Variablen vergessen wurden. *z.B. (8) Wurden hinreichend unterschiedliche / viele / generische Beispiele betrachtet? [10,18]*

In der Mathematik und der empirischen Wissenschaft ist ein negatives Ergebnis idealiter eine Widerlegung der Hypothese. In der Forschungsrealität sind die Konsequenzen weit komplexer: Es folgt z.B. eine Reanalyse der Daten, eine Modifikation der Hypothese, eine Modifikation des Experimentes, eine Modifikation der Definitionen. Dass dies auch in der Mathematik geschieht, hat Lakatos (1979) plastisch dargelegt. Bei positivem Ausgang ist man in Mathematik und Naturwissenschaft gleichermaßen darauf angewiesen, die Aussagekraft und die Reichweite des Ergebnisses zu bewerten. In beiden Bereichen kann das positive Ergebnis nur als Erhöhung der Plausibilität einer Hypothese gewertet werden. Das Ausmaß dieser Plausibilitätserhöhung ist jedoch nicht empirisch zugänglich, wohl aber einer systematischen Analyse und einem rationalen Diskurs

	Einen Beweis finden *Während die Überzeugung, dass die Vermutung der Eindeutigkeit richtig ist, sich auf experimentellem Weg schnell festigt, ist ein deduktiver Beweis in diesem Beispiel sehr schwer zu finden. Er benötigt ein tiefes Verständnis für fundamentale Eigenschaften der natürlichen Zahlen (vgl. z.B. Leuders, 2010).*

Während experimentelle Ergebnisse der empirischen Wissenschaften in die Phase der Publikation und Diskussion münden, ist das Ergebnis eines mathematischen Experimentes nur eine Vorstufe zur deduktiven Absicherung. Dieser Prozess ist noch mindestens so komplex wie der bisher beschriebene experimentelle.

Publikation, kritische Diskussion des Experimentes in der Wissenschaftlergemeinschaft, ggf. Replikation, Modifikation, Erweiterung	Publikation, kritische Diskussion des Beweises in der Wissenschaftlergemeinschaft, ggf. Korrektur, Erweiterung, alternative Beweise *Im Laufe der Jahrhunderte wurde der Beweis für den Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung auf immer wieder andere Weise geführt, optimiert und auf seine wesentliche Struktur befragt. Seine älteste Form geht auf Euklid (ca. 360 v. Chr.) zurück. Durch „Kantsche Experimente“ mit den Voraussetzungen hat man inzwischen Beispiele für Zahlenräume gefunden, in denen eine Zerlegung in Primfaktoren zwar möglich, aber nicht mehr eindeutig ist, z.B.*

	bei dem auf David Hilbert zurückgehenden Beispiel der Zahlen $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ (vgl. z.B. Flannery & Flannery, 2000).

Im „context of persuasion“ unterscheiden sich die Wissenschaften nur in einem Punkt: In der Mathematik wird die deduktive Absicherung, in den empirischen Wissenschaften die experimentelle kritisch auf ihre Überzeugungskraft geprüft. In beiden Bereichen allerdings werden das Ergebnis und seine Bedeutung für die Theorieentwicklung diskutiert. Dabei gibt es weit mehr Kriterien für die „Wahrheit“ im Sinne der Überzeugungskraft, z.B. die Einfachheit, die Relevanz usw..

6. Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag haben wir aufgezeigt, welche Analogien zwischen unterschiedlichen Konzepten des „experimentellen Erkenntnisgewinns“ bestehen und wie diese Analogien es erlauben, bedeutsame Schritte im mathematischen Erkenntnisprozess als „mathematisches Experimentieren“ zu konzeptualisieren. Insgesamt ergibt sich trotz der großen Spanne zwischen Experimenten als wissenschaftlichen Methoden einerseits und individuellen kognitiven Prozessen andererseits ein recht kohärentes Bild. Hilfreich ist dabei die Typisierung von Experimenten nach Medawar (1969) und der Rückbezug zu verschiedenen epistemologischen Funktionen nach Peirce (Deduktion, Induktion, Abduktion) (Peirce et al, 1960). Die Parallelität zum experimentellen Vorgehen in den Naturwissenschaften wurde auch durch die Übertragbarkeit des SDDS-Modells nach Klahr & Dunbar (1988) aufgezeigt und eine konkretisierende, vergleichende Analyse eines idealisierten Erkenntnisprozesses hat die Plausibilität dieses Theorieansatzes noch einmal gestützt.

Bedeutsam ist die Frage nach dem Charakter der hier beschriebenen epistemologischen Prozesse auch aus der Perspektive der Wissenschaften, die sich mit dem Lehren und Lernen von Mathematik befassen, also insbesondere Mathematikdidaktik und Psychologie. Gibt es beispielsweise so etwas wie deduktives und induktives Denken. Sind sie auch empirisch voneinander unterscheidbar? (z.B. Feeney & Heit, 2007). Wie sieht dieses Denken bei Schülerinnen und Schülern – speziell im Fach Mathematik – aus? Ähneln die Denkprozesse denen von Mathematikern? Wie können solche Prozesse im Mathematikunterricht geeignet angeregt werden? Diesen Fragen gehen die Autoren im Rahmen verschiedener empirischer Studien nach (Leuders et al., 2011; Philipp & Leuders, in diesem Band). Dabei kristallisiert sich heraus, was sich in den Detailanalysen mathematischer Erkenntnisprozesse wie in den Schriften von Euler bereits andeutet, dass es nämlich nützlich ist, das Experimentieren nicht nur als konsolidierte Methode wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns anzusehen, sondern auch als Modell für die individuelle Genese von mathematischen Erkenntnissen.

Die starke Betonung, die das Experimentieren in diesem Beitrag erhalten hat, soll nicht über zwei spezifische Differenzen, eine ontologische und eine epistemologische hinwegtäuschen: Der Phänomenbereich, auf den mathematische Experimente sich richten, sind gedankliche Konstrukte, mathematische Ideen und nicht die physische Natur. Dieser ontologische Unterschied ist jedoch je nach epistemologischer Grundposition irrelevant und spielt für die Denkprozesse keine besondere Rolle. Wesentlicher ist aber der epistemologische Unterschied. Während die Mathematik als Wahrheitskriterium letztlich nur die Deduktion, also den Beweis anerkennt, steht den Naturwissenschaften dieses Erkenntnisinstrument nicht zur Verfügung. Sie bewegen sich ein einem grundsätzlich falsifikationistischen Zyklus. Mathematik ist ***auch*** experimentell, und: Mathematik ist *„auch“* anders als Naturwissenschaft.

Literaturverzeichnis

Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1999). *The mathematical experience*. Boston: Houghton Mifflin.

Epstein, D., & Levy, S. (1995). Experimentation and Proof in Mathematics. *Notices of the AMS, Volume 42*(Number 6)*,* 670–674.

Euler, L. (1751). Decouverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport a la somme de leurs diviseurs: (Discovery of an extraordinary law of numbers in relation to the sum of their divisors). In *Bibliotheque impartiale* (Vol. 3, pp. 10–31).

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Nijhoff.

Feeney, A., & Heit, E. (2007). *Inductive reasoning: Experimental, developmental, and computational approaches*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Flannery, S. & Flannery, D. (2000). *In Code: A Mathematical Journey*. London: Profile Books.

Ganter, S. & Barzel, B. (2012). Experimentell zum Funktionalen Denken: Eine empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten als Ausgangspunkt mathematischer Begriffsbildung. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel, & N. Robin (Eds.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Theoretische Fundierung und empirische Befunde.* Münster: Waxmann.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Berlin: Springer.

Hoyningen-Huene, P. (1987). Context of Discovery and Context of Justification. *Studies in History and Philosophy of Science, 18,* 501–515.

Klahr, D., & Dunbar, K. (1988). Dual space search during scientific reasoning. *Cognitive Science*, (12)*,* 1–48.

Lakatos, I. (1979). *Beweise und Widerlegungen: Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Braunschweig: Vieweg.

Leuders, T. (2010). *Erlebnis Arithmetik: Zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Leuders, T. (2008). Kooperation im Mathematikunterricht fördern - fachliches und soziales Lernen miteinander verbinden. In R. Bruder, T. Leuders, & A. Büchter (Eds.), *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten* (pp. 129–148). Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Leuders, T. & Philipp, K. (i.Vorb.): Mit Beispielen zum Erkenntnisgewinn – Experiment und Induktion in der Mathematik.

Leuders, T., Naccarella, D., & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. *Journal für Mathematik-Didaktik, Volume 32, Number 2,* 205–231.

Medawar, P. B. (1969). *Induction and intuition in scientific thought*. London: Methuen.

Meyer, M. (2007). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht: Von der Abduktion zum Argument* (Vol. 52). Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Peirce, C. S., Hartshorne, C., & Weiss, P. (1960). *Pragmatism and pragmaticism and Scientific metaphysics* ([2. print], / ed. by Charles Hartshorne … ; Vol. 5 and 6). Cambridge, Mass-: Belknap Press of Harvard Univ. Press.

Peirce, C. S. & Walther, E. (1967). *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Baden-Baden: Agis-Verlag.

Philipp, K., & Leuders, T. (2012). Innermathematisches Experimentieren –empiriegestützte Entwicklung eines Kompetenzmodells und Evaluation eines Förderkonzepts. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel, & N. Robin (Eds.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Schüler lernen wissenschaftlich denken und arbeiten.* Münster: Waxmann*.*

Pietschmann, H. (1996). *Phänomenologie der Naturwissenschaften*. Berlin/Heidelberg: Springer.

Pólya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1): Oxford University Press.

Popper, K. R. (1963). *Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge.* London: Routledge & Kegan Paul.

Richter, A. (1995). *Der Begriff der Abduktion bei Charles Sanders Peirce* (Vol. 453). Frankfurt Main: Lang.

Schulz, A. & Wirtz, M., (2012). Analyse kausaler Zusammenhänge als Ziel des Experimentierens. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel, & N. Robin (Eds.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Theoretische Fundierung und empirische Befunde*. Münster: Waxmann.

Schulz, A., Wirtz, M. & Starauschek, E. (2012). Das Experiment in den Naturwissenschaften. In W. Rieß, M. Wirtz, A. Schulz, B. Barzel, & N. Robin (Eds.), *Experimentieren im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Theoretische Fundierung und empirische Befunde*. Münster: Waxmann.

Shadish, W., Cook, T., & Campbell, D. (2002). *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Generalized Causal Inference*. Boston: Houghton Mifflin.

Steinle, F. (2005). *Explorative Experimente: Ampère, Faraday und die Ursprünge der Elektrodynamik*. Techn. Univ., Habil.-Schr.--Berlin. (Bd. 50). Stuttgart: Steiner.

Wiener, N. (1923). *Collected works: With commentaries*. Cambridge, Mass.: The MIT Pr.

Zeilberger, D. (1993). Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture. *Notices of the American Mathematical Society*, (46)*,* 978–981.