Vorfassung eines Beitrags in PÄDAGOGIK 12/2012

„Einüben oder Ausüben?“ – Übekonzepte im Mathematikunterricht

Timo Leuders

„Entschuldigen Sie, mein Herr, wie bitte komme ich in die Carnegie Hall?“ –
„Üben, Üben, Üben!“

Der ernste Hintergrund dieses unter Musikern populären Witzes ist die Tatsache, dass musikalische Höchstleistungen ohne jahrelanges tägliches Üben nicht erreichbar sind. Was würde wohl ein Mathematiker antworten, wenn man ihn fragt, wie man zur größten Primzahl gelangt?

Gute Musiker und gute Mathematiker müssen die nötigen Techniken „ein-üben“, aber sie brauchen auch künstlerische bzw. mathematische Kreativität, um ihre Tätigkeit „aus-üben“ zu können. Die Pointe besteht aber auch darin, dass Ein-Üben nicht genügt. In mathematischen Worten gesprochen: Üben ist notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für musikalische oder mathematische Leistung.

Angehörige beider Berufsgruppen werden zudem bestätigen, dass Ein-üben und Aus-üben Hand in Hand gehen. Sie haben nicht erst ihr Handwerkszeug eingeübt, um dann irgendwann kreativ zu werden, sondern das Üben selbst ist bereits ein kreativer Akt, der sich auf die Anwendung bezieht. Mathematische Leistungen – auch wenn es sich nicht um künstlerische oder wissenschaftliche Höchstleistungen handelt – unterliegen ganz ähnlichen Prinzipien des Ein- und Ausübens. Das ist das zentrale Thema dieses Beitrags.

Wie sieht nun Üben im Mathematikunterricht aus? Ein Blick in ein, zugegeben etwas in die Jahre gekommenes Schulbuch (Abb.1) zeigt, dass es durchaus noch eine Übepraxis gibt, bei der das Üben mathematischer Fertigkeiten eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Repetieren von Tonleitern besitzt.

Abb.1: Üben in einem traditionellen Schulbuch der Klasse 8

a) $(3x-6)(x+4)=0$	**b)** $(6x+18)(2x-14)=0$	**c)** $y(2y-5)=0$
$(x-11)(5x-20)=0$	$(24-8x)(30-6x)=0$	$3z(12+5z)=0$
$x(7x+35)=0$	$(9x+9)(7x+21)=0$	$(8x-12)x=0$
$(9x-99)(8-x)=0$	$(12x-36)(33-11x)=0$	$(16+10y)7y=0$
$(5-10x)(9+3x)=0$	$(14+2x)(14-2x)=0$	$-z(35-7z)=0$

3. a) $x^2-7x=0$	**c)** $5x^2-10x=0$	**e)** $5x^2-4x=0$	**g)** $3x^2+5x=0$
$x^2+5x=0$	$2x^2+26x=0$	$10x^2+3x=0$	$7x^2-x=0$
$4x-x^2=0$	$18x-3x^2=0$	$18x^2+8x=0$	$4x-11x^2=0$
$11x+x^2=0$	$35x+7x^2=0$	$2x^2-20x=0$	$-3x-2x^2=0$
b) $x^2-9=0$	**d)** $6x^2-24=0$	**f)** $x^2-0{,}04=0$	**h)** $\frac{1}{2}z^2-8=0$
$y^2-64=0$	$11z^2-11=0$	$x^2-1{,}96=0$	$\frac{1}{10}x^2-2{,}5=0$
$25-x^2=0$	$40-10x^2=0$	$y^2-\frac{9}{16}=0$	$\frac{1}{10}x^2-0{,}009=0$
$49-x^2=0$	$135-15x^2=0$	$\frac{25}{64}-x^2=0$	$\frac{1}{3}x^2-3=0$

Schulbuchseiten wie diese nennt man auch „graue Päckchen“ (Wittmann, 1992) oder „Plantagenaufgaben“. Sie spiegeln implizit eine Übekonzept wieder, das lernpsychologisch durchaus seine Berechtigung besitzt: Eine mathematische Tätigkeit wie das Addieren von Brüchen, das Lösen quadratischer Gleichungen (wie im Bild) oder das Umformen von Potenztermen soll durch wiederholendes Anwenden „eingeschliffen“ werden. Der Übezweck ist also das Automatisieren einer Fertigkeit, damit diese künftig den Lernenden nicht mehr belastet und dieser sich komplexeren und möglicherweise interessanteren Problemen zuwenden kann. Leider folgen solche Probleme oft leider nicht, oder erst nach vielen Jahren, wenn der Trainingseffekt sich wieder verflüchtigt hat.

Übezweck: Automatisieren

Dennoch: Der Übezweck „Automatisieren“ ist grundsätzlich legitim, man muss aber im Einzelfall fragen, ob das Automatisieren an dieser Stelle wirklich zweckmäßig ist. Für das Einmaleins steht das wohl gänzlich außer Frage: Wer in der sechsten Klasse für 6 mal 7 sich noch Strategien überlegen muss (z.B. mehrfaches Addieren: 6,12,18,24,30,35,42), hat den Kopf nicht frei für die Lösung einer Anwendungsaufgabe (oder wahlweise: die Hände nicht frei, denn der Griff zum Taschenrechner ist bei solchen Aufgaben ebenfalls belastend).

Dies gilt aber nicht für alle Inhalte, die heutzutage geübt werden. Wie sieht es beispielsweise mit den Potenzgesetzen aus? Wie weit und wie sicher muss ein Zehntklässler Umformungen wie $(a^2 \cdot b^3)^2 = a^4 \cdot b^6$ automatisiert durchführen können? Mathematiklehrerinnen und –lehrer wissen genau, wie leicht diese Fähigkeit wieder zerfällt, und wie unsicher die Schülerinnen und Schüler ein oder zwei Jahre später sind, wenn sie in der Oberstufe mit Termen umgehen, die solche Potenzen enthalten. Das Üben von automatisierten Fähigkeiten auf Vorrat ist also nur begrenzt ertragreich. Für einen Schüler, der nicht durchgehend damit umgehen muss, ist es schwer, in so vielen verschiedenen Verfahren mit unterschiedlichen Gesetzmäßigkeiten sicher zu sein, ohne sie zu verwechseln: War $(b^3)^2$ nicht eher $b^{3+2}=b^5$ oder doch b^3+b^2? Möglicherweise reicht es, wenn von der Potenzrechnung nur noch das eine übrig bleibt, nämlich, dass a^5 nur die Abkürzung ist für: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Auch damit kann man die obige Aufgabe lösen: $(a^2 \cdot b^3)^2 = (a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b) \cdot (a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 \cdot b^6$. Das ist dann zwar nicht schnell und automatisch, aber wenigstens stabil. Reicht das nun, oder nicht? Dazu später mehr.

Wenn man sich also erst einmal darüber Rechenschaft abgelegt hat, was des Automatisierens wert ist, kann man dieses sinnvoll in ein Übekonzept integrieren, z.B. so:

- Wachhalten von Fertigkeiten, durch gelegentliche Übephasen, z.B. Kopfrechenminuten oder eine Übekartei, die auch noch mehere Monate nach der Einführungen neuer Verfahren in eigenen Übestunden genutzt wird.
- Integriertes Üben von Fertigkeiten, die dauerhaft beherrscht werden sollen, z.B. das wiederholende Arbeiten mit Prozentzahlen, auch wenn man gerade mit Dezimalzahlen oder Brüchen arbeitet.

Übezweck: Verstehen

Das Beispiel zu den Potenzgesetzen zeigt, dass es neben dem automatisierten Anwenden noch einen weiteren Übezweck gibt: das Verstehen. In der Mathematik bedeutet dies, dass man zu einem mathematischen Verfahren oder Konzept geeignete inhaltliche Vorstellungen besitzt. Solche Vorstellungen erlauben es, eine Aufgabe auch dann zu bearbeiten, wenn die automatische Sicherheit bröckelt. Inhaltliche Vorstellungen erlauben sozusagen das Rekonstruieren von teilweise Vergessenem, denn sie bilden die Essens mathematischer Konzepte. Der Kasten 1 stellt an einigen Beispieln die beiden Dimensionen „Verfahren beherrschen“ und „Konzept verstehen“ gegenüber.

Kasten 1: „Verfahren beherrschen“ und „Konzept verstehen“

Mathematisches Konzept: Durchschnitt
Verfahren: Alles Addieren und durch die Anzahl teilen: (1+3+2+5+7):5
Inhaltliche Vorstellung: Alles zusammenlegen und dann gleich verteilen.
Mit einer solchen Übungsaufgabe wird auch die Vorstellung geübt:

Training **16 Vorstellungen vom Mittelwert**

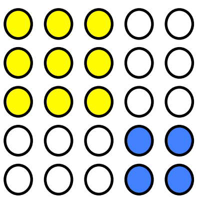
Silja und Tim stellen sich bei „Mittelwert“ verschiedene Dinge vor.

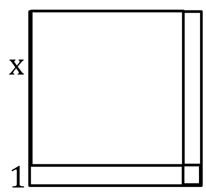
a) Silja ist 154 cm und Tim ist 146 cm groß
Wie würde Silja den Mittelwert ausrechnen und wie Tim ?

b) Nun kommt Sven hinzu. Er ist 156 cm groß.
Wie würden Siljas und Tims Lösungen nun aussehen?

Mathematisches Konzept: Binomische Formel
Verfahren: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Inhaltliche Vorstellung: Beim Quadrieren von zwei Summen entstehen vier Terme, zwei Quadrate und zweimal ein Rechteck.
Mit einer solchen Übungsaufgabe wird auch die Vorstellung geübt:

Welche Formel wird durch das Bild jeweils dargestellt?





Lösungen: $(3+2)^2 = 9 + 2 \cdot 6 + 4$ $\qquad$ $(x+1)^2 = x^2 + 2 \cdot x + 1$

Solche inhaltlichen Vorstellungen werden bereits oft für den Zugang zu einem neuen Inhalt genutzt werden. Wenn sie aber danach schnell zugunsten des automatisierten Lösens aufgegeben werden, entsteht fragiles Wissen. Vorstellungen als stabilisierende Stützen des Verstehens sollten also durchgehend mitgeübt werden (Prediger, 2009)

Übezweck: Verstehen, wann und warum

Üben dient nicht nur dem Sichern von Wissen, sondern auch der Steigerung seiner Qualität (Renkl, 2000). Bei der Erarbeitung eines neuen Inhaltes geht es natürlich zunächst einmal um dessen zentralen Aspekte. Zum wirklichen Verstehen eines Verfahrens oder Konzeptes reich das aber nicht aus. Unter anderem gehört auch das Wissen dazu, wie weit dieses Wissen reicht: In welchen Fällen kann man es anwenden, in welchen nicht? Wie hängt es mit anderen, ähnlichen Konzepten zusammen, wie unterscheidet es sich? Welche typischen Fehler können gemacht werden? Hier geht es also um reflexives Wissen darüber, wann ein Verfahren oder Konzept angewendet werden kann. Solches Wissen entsteht erst nach und nach durch vielfältige Anwendung in Verbindung mit der Anregungen von Reflexionen. Diese Wissensqualität muss also beim Üben aktiv angesprochen werden und auch hierzu gibt es Aufgabenformate, wie z.B. die Aufgabe in Abb.2.

17 Skilift: senkrecht oder senkrecht?

a) Ole hat nach Tills Beschreibung gezeichnet. Was meinst du zu Oles Zeichnung? Was hat Till gemeint, was hat Ole verstanden?

b) Für die Skifahrer unter euch: Wie muss man die Skier beim Schleppliftfahren halten? Was passiert, wenn man die Skier anders hält?

Übezweck: Problemlösen

Die sichere Beherrschung von Basiswissen ist die Voraussetzung für die Fähigkeit, mit diesem Wissen, flexibel Probleme zu lösen. Diese flexible Problemlösefähigkeit ist letzlich das, was man unter Kompetenz versteht (Leuders, 2011). Sie entsteht aber nicht als das Ergebnis von extensivem Training, sondern mitgeübt werden – und zwar von Anfang an. Ein oft zu vernehmende Alltagstheorie hierzu lautet, dass das Problemlösen gewissermaßen erst als zweite Stufe auf die Sicherung des Basiswissens folgen könne. Leider bleibt der Unterricht dann gerade bei schwächeren Schülerinnen und Schülern bei diesem „sichernden Üben“stehen und gelangt erst gar nicht zur flexiblen Anwendung, Dass problemlösendes Denken aber einerseits für alle Lernenden bedeutsames Lernziel ist und andererseits auch auf jedem Niveau gefördert werden kann, zeigen die Formate „substantieller Aufgaben“ (Wittmann, 1984). Das so genannte „produktive Üben“ oder „intelligente Üben“ (Wittmann, 1992; Leuders, 2005), lässt Lernende noch während des Übens (kleine) Entdeckungen zu mathematischen Strukturen machen oder (einfache) Probeme lösen – auch in der Förscherschule (Scherer, 2009). Solche Aufgabenformate finden auch langsam Eingang in die Sekundarstufe. Beispielsweise durch „operative Rückwärtsaufgaben“ (Winter, 1984) oder durch das Erkunden mathematischer Muster, wie es in Abb.3 dargestellt ist.

2 Binomische Formeln (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Muster erkunden“)

a) Wie geht es weiter? Rechne und setzte die Päckchen fort.

(1)	(2)
$(x + 3)^2 + 2 = x^2 + 6x + 11$	$(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$
$(x + 2)^2 + 2 = \dots$	$(x + 1)(x + 2) = \dots$
$(x + 1)^2 + 2 = \dots$	$(x + 1)(x + 1) =$

b) Hinter diesen Päckchen stecken immer Muster. Welche Muster kannst du erkennen? Versuche deine Vermutungen zu begründen.

c) Erfindet selbst Päckchen mit ähnlichem Muster und stellt sie euch gegenseitig als Aufgaben.

4 Binomische Formeln (in selbstdifferenzierender Aufgabe „Probleme lösen“)

$$\square x^2 + \square x + \square = (\square x + \square)^2$$

Welche Zahlen passen in die Kästchen? Suche zu jeder der folgenden Teilaufgaben möglichst viele verschiedene Lösungen:

a) irgendwelche Zahlen b) nur gerade Zahlen c) nur ungerade Zahlen
d) nur Quadratzahlen d) nur negative Zahlen

Abb.3: Üben beim Entdecken von Mustern, Üben beim Problemlösen
(nach Leuders & Prediger, 2012)

Die Beispiele zeigen: Üben und Entdecken stehen nicht im Widerspruch, sondern können gleichzeitig stattfinden und sich gegenseitig ergänzen (Selter, 1995; Leuders, i. Vorb.). Im Gegenteil: Das Untersuchen von Mustern und Strukturen, das Lösen von Problemen versieht das Üben auch mit einem Sinn. Mathematische Grundfertigkeiten werden nicht als Vorrat für einen späteren Einsatz, sondern gleich *beim* mathematischen Arbeiten gefördert. Produktives Üben – das ist vielleicht die hervorstechendste Eigenschaft dieses Konzeptes – verbindet Autormatisieren und Reflektieren im Rahmen von sinnstiftendem mathematischen Arbeiten (Schoenfeld, 1992; Leuders et al. 2011).

Dabei wird nicht nur die Problemlöse*fähigkei*t, sondern auch eine Problemlöse*haltung* gefördert. Nicht ist fataler als die Einstellung: Wenn eine Mathematikaufgabe nicht in 5 Minuten lösbar ist, und zwar mit den Mitteln, die unmittelbar zuvor erarbeitet wurden, ist sie gar nicht lösbar. Geübt werden muss stattdessen die Einstellung: Wenn ich nicht unmittelbar weiß, wie ich weiterkomme, probiere ich einmal etwas aus, zum Beispiel ein einfaches Beispiel.

Brauchen alle dasselbe Üben?

Die Phase des Übens ist – weit mehr als das Erkunden und Sichern von neuen Inhalten - die Gelegenheit für eine möglichst hohe, an die unterschiedlichen Lernberdürfnisse angepasste Aktivität jede Einzelnen. Hier kann ein individualisierendes, hochadaptives Üben in äußerer Differenzierung gestaltet werden. Das stellt allerdings hohe Anforderungen an die diagnostische und organisatotorische Kompetenzen der Lehrkraft.

Viele der vorigen Aufgabenbeispiele haben bereits einen praktikablen Weg speziell für das Fach Mathematik angedeutet. Lernende können durchaus an *denselben* Aufgaben auf *unterschiedlichem* Niveau arbeiten. Hierzu bieten sich so genannte „selbstdifferenzierende“ Aufgabenformate an, die inzwischen vielfach praxiserprobt sind (Leuders & Prediger, 2012). Sie sind für alle Lernenden gleichermaßen zugänglich, leiten die schwächeren zur gründlichen Durcharbeitung der Grundfähigkeiten an, aber bieten den stärkeren die Option, die Phase des Einschleifens zu verkürzen und vertiefte Erkundungen durchzuführen. Mit solchen Aufgaben lassen sich auch methodisch Konzepte der inneren Differenzierung im Mathematikuntericht durchführen (Heymann, 1991).

Anwenden – nicht nur beim Aus-Üben

In den letzten Jahrzehnten gabe es in Deutschland intensive Bemühungen, die oft ungeliebte Mathematik, durch eine stärkere Betonung des Nützlichkeitsaspekts durch realistische Anwendungen attraktiver zu gestalten und in ihrem bildenden Wert zu steigern (Blum, 1985). Das hat zu einer höheren Sensibilität gegenüber pseudorealistischen Textaufgaben und einer Stärkung von Modellierungsaktivitäten geführt. Mitunter führen solche Anwendungen jedoch noch ein Schattendasein in „vermischten Übungen“ oder „Projektseiten“. Modellieren, so sie Begründung, geht ja erst, wenn die Basisfähigkeiten vorhanden sind. Das „Einüben“ müsse dem „Ausüben“ vorangehen.

Dass dieses Lernmodell aber keineswegs geeignet ist, Kompetenzen zu fördern, also Fähigkeiten und Überzeugungen zur Mathematik aufzubauen, darauf haben viele Didaktiker wie z.B. Roth (1976) oder Wagenschein (1968) und in der Mathematik besonders Freudenthal (1973) hingewiesen: Mathematische Konzepte werden nicht erst definiert und gelernt, um sie später anzuwenden, sie entstehen vielmehr „genetisch“ aus der Anwendung. Der Durchschnittsbegriff beispielsweise wird nicht etwa gelernt und eingeübt, um ihn danach auf verschiedene Situationen anzuwenden. Er wird von den Lernenden aktiv entwickelt, um ein Problem zu lösen, beispielsweise, ob die 13 Mädchen der Klasse größere Füße haben als die 9 Jungen. Dann müssen die Schülerinnen und Schüler das Konzept „Zusammenlegen und gleichmäßig Verteilen“ als inhaltliche Vorstellung vom Mittelwert entwickeln (s. Abb.4). Anwendungen entfalten also nicht erst beim Üben ihre sinnstiftende Wirkung.

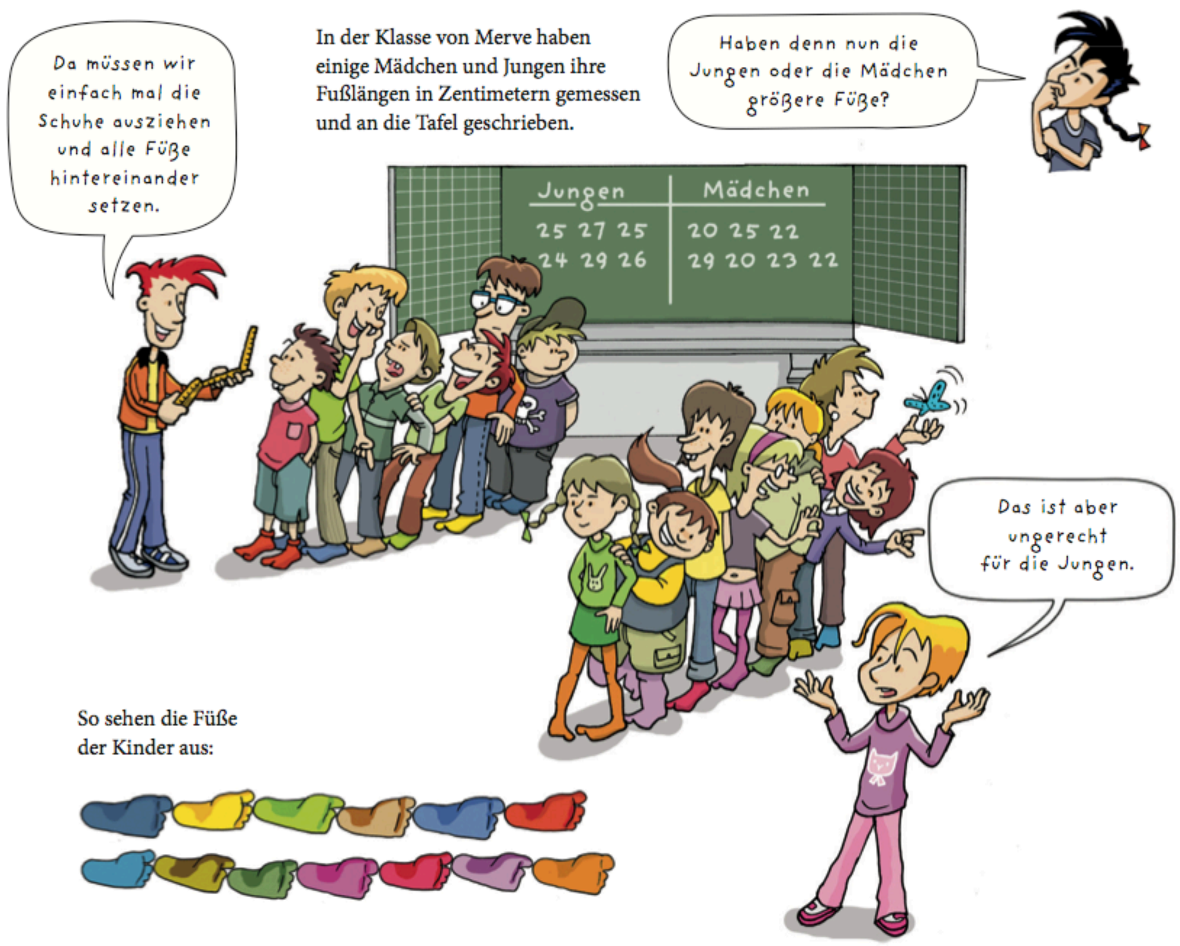


Abb.4: Anwenden nicht erst beim Üben,
sondern als Ausgangspunkt für genetisches Lernen

Chancen und Gefahren für sinnstiftendes Üben

Dennoch muss man sich beim Aufbau einer Übekultur gegen eine ganze Reihe von meist unausgesprochenen Widerständen wappnen: Moderene Übeformate irritieren Eltern, sie können sich von ihren eigenen Übeerfahrungen nicht leicht lösen und brauchen Erklärungen, warum das heimische Üben nicht dem Trainieren von „Mathemuskeln“ gleicht.

Aber auch wir als Lehrerinnen und Lehrer erliegen allzuleicht der Tendenz, das sichere Abarbeiten gewisser Verfahren zu hoch zu hängen und automatisierten Fähigkeiten beim Üben und in Klassenarbeiten einen zu greoßen Raum zu geben. Fatal wirkt sich dabei aus, dass auch Schüler, besonders schwächere, mit dem Training von klaren Algorithmen schneller zufrieden sind als mit der Anforderung inhatlichen Verständnisses. Und auch manch unerfahrene Nachhilfelehrer verstärkt durch sein Training diesen unguten Zyklus - und auf das Nachmittagsangebot hat man als Lehrer nur begrenzten Einfluss (für Ratschläge an Eltern, s. Leuders & Leuders, 2012).

Die Beispiele in diesem Beitrag konnten hoffentlich deutlich machen, welche Möglichkeiten bestehen, dass Lehrende wie Lernende, auch bei den einfachsten Übezielen das gleichmachende, eintönige Fertigkeitstraining zugunsten sinnstiftenden mathematischen Tuns verlassen.

Üben, das ist das Fazit der Überlegungen, soll die verschiedenen Facetten mathematischer Kompetenz ausabalanciert in den Blick nehmen: Automatisieren, Verstehen, Reflektieren, Problemlösen werden nicht nacheinander sondern nur im Konzert erworben. Dazu gibt es im Fach Mathematik inzwischen eine ganze Reihe von Ansätzen, insbesondere von Aufgabenformaten, die man immer mehr in Schulbüchern findet, die man aber auch mit wenig Mühe im Fachkollegium selbst produzieren kann (Leuders, 2009).

***Danksagung**: Viele der in diesem Beitrag dargestellten Überlegungen entstammen der gemeinsam Arbeit im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojektes KOSIMA, das wir – unterstützt vom Cornelsen Verlag – in dem wir über viele Jahre hinweg mit Bärbel Barzel, Stephan Hußmann und Susanne Prediger zusammenarbeiten.*

Literatur

Barzel, B. / Leuders, T. (2012): Meine Klasse und ich – Zahlenangaben sammeln und_vergleichen. In: Barzel, B / Hußmann, S. / Leuders, T. / Prediger, S. (Hrsg.): mathewerkstatt 5. Cornelsen, Berlin.

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2011) (Hrsg.). „Das macht Sinn!“ Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. Praxis der Mathematik in der Schule 53(37).

Blum, W. (1985): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. Mathematische Semesterberichte. Zur Pflege des Zusammenhangs zwischen Schule und Universität. Kahle u.a. (Hrsg.), Band XXXII, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, S. 195-232.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Bd. 1. Stuttgart: Klett.

Heymann, H.W. (1991): Innere Differenzierung im Mathematikunterricht. Mathematik lehren, 49, 63-66.

Leuders, T. (2005): Intelligentes Üben selbst gestalten! - Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. Pädagogik, 11, 29–32.

Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker &. H.-G. Weigand (Hrsg.), Mathemagische Momente (S. 130-143). Berlin: Cornelsen.

Leuders, T. (2011): Kompetenzorientierung - eine Chance für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts? In K. Eilerts/ A. Hilligus/ G. Kaiser/ P. Bender (Hrsg.), Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung. Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der Bildungsforschung und der Lehrerbildung. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens. Münster: Lit-Verlag.

Leuders, T. (i. Vorb.): Entdeckendes Lernen – Produktives Üben. Erscheint in: H. Linnenweber-Lamerskitten (Hrsg.) (2013): Fachdidaktik Mathemtik – Grundbildung und Kompetenzaufbau der Sek. I und II. Kallmeyer

Leuders, T., & Prediger, S. (2012): „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen. In R. Lazarides & A. Ittel (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht - Implikationen für Theorie und Praxis (pp. 35-66). Bad Heilbrunn: Klinkhardt Verlag.

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!" Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. Praxis der Mathematik in der Schule(37), 2-9.
Leuders, T./ Leuders, J (2012). Mathe können! Ein Ratgeber für Eltern. Kallmeyer/Klett, Seelze-Velber
Prediger, S. (2009): Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken. In: Leuders, T./ Hefendehl-Hebeker, L./ Weigand, H. (Hrsg.): Mathemagische Momente, Cornelsen, Berlin, S.166-175.
Renkl, A. (2000): Automatisierung allein reicht nicht aus: Üben aus kognitionspsychologischer Perspektive. In R. Meier, U. Rampillon, U. Sandfuchs & L. Stäudel (Hrsg.), Üben und Wiederholen (Jahresheft 2000) (S. 16-19). Seelze: Friedrich Verlag.
Roth, H. (1976). Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens. Hannover: Beltz,.
Scherer, P. (2009): Produktives Mathematiklernen - auch in der Förderschule?! In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Eds.), Handbuch Rechenschwäche (pp. 434–447). Weinheim: Beltz.
Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334-370). New York: Macmillan.
Selter, Chr. (1995): Entdeckend üben - übend entdecken. Grundschule, 5, 30 - 34 & 39.
Wagenschein, M. (1968). Verstehen lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Weinheim: Beltz.
Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. Mathematik lehren, 2, 4–16.
Wittmann, E. Ch. (1992): Wider die Flut der bunten Hunde und der grauen Päckchen: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), Handbuch produktiver Rechenübungen, S. 152–166. Stuttgart: Klett.
Wittmann, E.Ch. (1984): 'Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education', Educational Studies in Mathematics 15, 25-36.