Matthias GLADE, Dortmund

Vom Zeichnen zur Rechenregel – Individuelle Prozesse der fortschreitenden Schematisierung zum Anteil vom Anteil

1. Fortschreitende Schematisierung

Das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung ist eines der Kernprinzipien der Unterrichtskonzeption der Realistic Mathematics Education (RME, vgl. Treffers 1987, Streefland 1991). Unter Schematisierungsprozessen werden hier alle Prozesse begriffen, die von individuellen, informellen und durch Anschauungsmittel gestützten Lösungswegen zum Kalkül führen, gleich ob sie sich in Bildern, symbolische Notationen, Sprache oder Handlungen manifestieren (nach Treffers 1987). Damit lässt sich das Schematisieren als vertikale Mathematisierung im RME-Modell charakterisieren: es geht nicht um die Mathematisierung lebensweltlicher Situationen („transforming a problem field into a mathematical problem“), sondern um die innermathematische Weiterentwicklung der ersten Ansätze („processing within the mathematical system“) (Treffers 1987, 247).

2. Forschungsfokus und -design

Während z.B. Streefland (1991) langfristige, über Monate und Jahre angelegte Prozesse der fortschreitenden Schematisierung untersucht, werden in der vom Autor begonnenen Studie kürzere Zeiträume von 1-2 Schulstunden betrachtet. Dabei werden die initiierten Lernprozesse und deren Gelingensbedingungen und Hürden auf einer Mikroebene analysiert.

Die Studie ist im Rahmen des langfristigen Entwicklungsforschungsprojekts KOSIMA (Hußmann / Leuders / Barzel / Prediger in diesem Band) angesiedelt. Sie wurde als „Design Experiment“ (Gravemeijer / Cobb 2006) in 7 halbstandardisierten Interviews an einer nordrheinwestfälischen Gesamtschule durchgeführt. Die Prozesse wurden videographiert, transkribiert und im Hinblick auf die initiierten Teilprozesse und die Rolle des Anschauungsmittels mit Hilfe von Steinbrings (2005) epistemologischem Dreieck qualitativ ausgewertet.

3. Mathematisches Thema: Anteil vom Anteil in Rechteckbildern

Ausgehend von Kontextproblemen wurde zuvor das Konzept des Anteils vom Anteil entwickelt (Aufgabenmaterial nach Prediger et al 2012, auch abgedruckt in Glade / Schink 2011) und Anteile von Anteilen in Rechteckbildern anschauungsgestützt bestimmt (vgl. Rechteckbild zu 1/6 von einem

1/5 in Abb. 2 auf der Folgeseite). Der erste Schematisierungsprozess zielt nun darauf ab, statt der Zeichenmethode eine Rechenregel für den Fall der Stammbrüche (eins durch Nenner mal Nenner) selbst zu finden. Dazu dienen die Schematisierungsimpulse im nebenstehendem Kasten.

Schematisierungsimpulse:

- Kann man das auch einfacher schreiben / lösen?
- Kann man das auch ohne das Zeichnen von Bildern lösen?
- Kannst du eine Regel finden?
- Begründe deine Regel.
- Moderationsimpulse: Vergleicht untereinander. Erklärt einander.

4. Rolle des Anschauungsmittels

Entscheidend für die Schematisierungsprozesse sind die wohl gestufte Deutung, die Strukturierung und die Ablösung vom Anschauungsmittel. Empirische Studien mit Grundschulkindern (z.B. Steinbring 1994) zeigten wiederholt, dass Anschauungsmittel die mathematischen Strukturen, die sie „enthalten“, nicht einfach so preisgeben, sondern vielfältigen Deutungsprozessen unterworfen werden müssen, um von Lernenden durchdrungen zu werden. Sonst kann es zu rein empirischen Begründungen der arithmetischen Beziehungen ohne Verinnerlichung der Struktur kommen, so dass die Anschauungsmittel ihre intendierte Wirkung als Vorstellungshilfe nicht entfalten können (ein Beispiel zu Brüchen liefert Prediger 2011).

Zudem werden Anschauungsmittel von verschiedenen Lernenden unterschiedlich gedeutet. Diese sogenannte „Mehrdeutigkeit“ von Anschauungsmitteln ist Grundlage für die fortschreitende Schematisierung: in einem wiederholten Deutungsprozess und im Austausch mit anderen Lernenden soll der Einzelne zu vertieften, strukturorientierteren Deutungen des Anschauungsmittels gelangen und diese mit arithmetischen Mustern verknüpfen. Einige Ergebnisse der Studie werden im Folgenden skizziert.

5. Typische und untypische Schematisierungsprozesse

Die Analyse mit dem epistemologischen Dreieck erlaubt das Nachzeichnen der sich verändernden Beziehung zwischen Referenzkontext und Zeichen. Zu Beginn des Prozesses müssen sich die Lernenden das Rechteckbild noch aneignen; es ist zu konstruierendes oder zu deutendes Zeichen, das im Referenzkontext der bekannten arithmetischen Beziehungen erschlossen wird (vgl. Abb.1 auf der Folgeseite). Dabei werden verschiedene Strukturierungen des Rechtecks (rein vertikal, rein horizontal, vertikal-horizontal) ausprobiert. In einem eher untypischen Fall wurden von den Lernenden unnötig große Seitenlängen benutzt, was wiederum eine Fülle an Vereinfachungsprozessen nach sich zog(vgl. Glade /Schink2011).

Sobald ein geeignetes Rechteck gefunden ist und die Anteile markiert sind, so wird das Rechteckbild zum stützenden Kontext, der es ermöglicht den Anteil vom Anteil konkret zu bestimmen (Abb. 2). Dies kann durch Auszählen, zeilenweises Addieren oder Multiplizieren von Höhe und Breite vollzogen werden. Der Optimierung der Lösungswege schließt sich dann eine Phase der Stabilisierung des „besten“ Weges an.

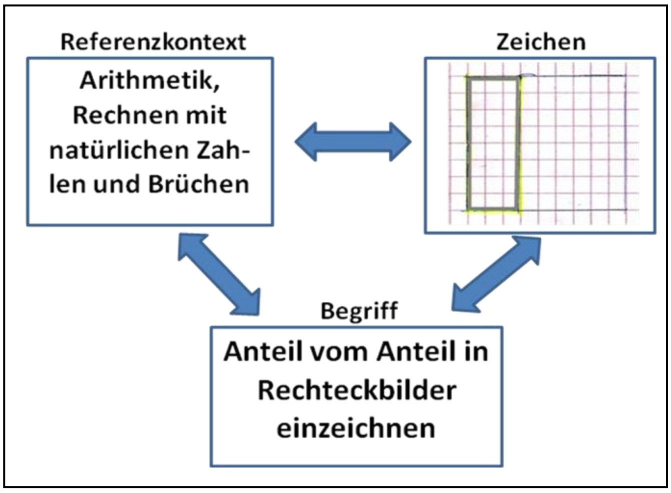

Abb. 1: Rechteck als Zeichen, das gezeichnete Rechteck passt nur zum Teil zur Aufgabe 1/3, davon 1/5

In der Folge erfährt der Referenzkontext Rechteckbild zwei interessante Veränderungen: er wird zunächst in die Vorstellung verlegt, insofern die Lernenden dann alle versuchen, sich von der externen graphischen Darstellung zu lösen, indem sie die Aufgaben im Kopf lösen. Wenn dann eine Regel für Stammbrüche formuliert wurde, verschwindet der Referenzkontext und die nächste Aufgabe kann kalkülmäßig, also durch bloßes Operieren auf der Zeichenebene, gelöst werden.

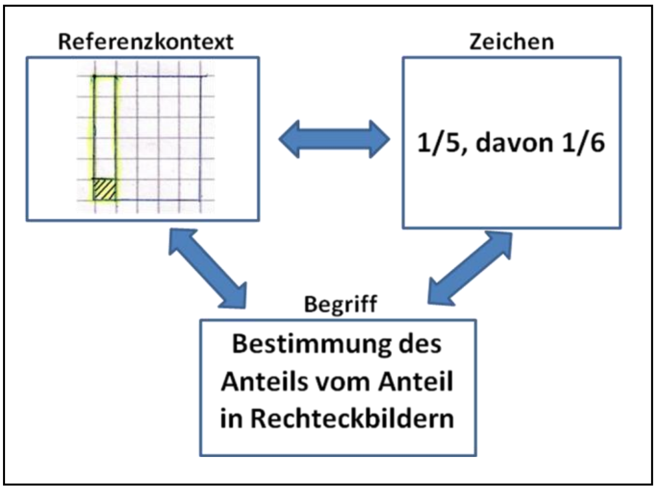

Abb. 2: Rechteck als Referenzkontext

Kann der Referenzkontext zur Begründung der Gültigkeit der syntaktisch gebildeten Zeichenketten von den Lernenden wieder herangezogen werden, so war ein solcher Schematisierungsprozess erfolgreich.

Dies kann ganz konkret auf das Beispiel bezogen formuliert sein oder Ansätze enthalten, die konkrete Situiertheit der Bilder zu verlassen (Z.B.: „Immer bei einem ganzen hier, (zeigt auf Rahmen) Höhe mal Breite, die oberen muss man dann auch mal einzeichnen und dann hat man eine kleine Fläche und dann auch wieder Höhe mal Breite.“ als Begründung der allgemeinen Regel zum Anteil vom Anteil als „Multiplikation“ von Brüchen).

6. Fazit

In den getätigten Interviews vollzogen die Lernenden ausgehend von den Rechteckbildern eine Vielzahl von Schematisierungsschritten (exemplarisch für einen Fall zweier Kinder im nebenstehenden Kasten). Die Vielzahl der Prozesse und die Wechsel des Referenzkontextes, wie sie durch die Analyse mit dem epistemologischen Dreieck nachvollzogen wurden, zeigen, wie komplex ein solcher Prozess der Regelfindung ist. In ihm ergeben sich wiederholte Deutungen des Anschauungsmittels, wie sie für eine erfolgreiche Verinnerlichung der zugrundeliegenden Struktur notwendig sind, um oberflächliche bloß empirische Deutungen auszuschließen.

Schematisierungs-Teilprozesse

- Vereinheitlichen
- Verschiedene Strukturen hineinsehen
- Vereinfachen
- Strukturen etablieren
- Lösen von externen graphischen Darstellungen
- Lösen von Vorstellungen

Literatur

Glade, Matthias / Schink, Andrea (2011): – Vom Anteile bestimmen zur Multiplikation von Brüchen – Ein Weg mit System: fortschreitende Schematisierung, in: Mathematik lehren 162, S. 43-47.

Gravemeijer, Koeno / Cobb, Paul (2006): Design research from the learning design perspective, in: van den Akker, J, Gravemeijer, K., McKenney, S., & Nieveen, N. (Eds.): Educational Design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products. Routledge, London, 45-85.

Prediger, Susanne / Schink, Andrea /Schneider, Claudia / Verschraegen, Jan (2012): Kinder weltweit – Anteile in Statistiken, erscheint in: Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo (Hrsg.): Mathewerkstatt 6. Cornelsen, Berlin.

Prediger, Susanne(2011): Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel, erscheint in: Der Mathematikunterricht 56(3).

Treffers, Adri (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project.- Reidel, Dordrecht.

Steinbring, Heinz (1994): Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule. Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen, in: Mathematische Unterrichtspraxis 4, 7-19.

Steinbring, Heinz (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective, Mathematics Education Library (MELI), No. 38. Berlin, New York: Springer.

Streefland, Leen (1991): Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research, Kluwer, Dordrecht.