Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN, Timo LEUDERS, Susanne PREDIGER, Freiburg/Dortmund

Nachhaltig lernen durch aktives Systematisieren und Sichern - Konzept und Umsetzung in der mathewerkstatt

Das Systematisieren und Sichern gehört neben dem Erkunden und dem Vertiefen und Üben zu den zentralen Phasen des Mathematikunterrichts. Während es zum Erkunden und Vertiefen ein breites Spektrum an Konzepten und schüleraktivierenden Lernumgebungen gibt (z.B. Freudenthal 1983; Müller/Wittmann 1990), ist die Anzahl an konzeptionellen Ideen zum Sichern und Systematisieren eher gering. Unter Systematisieren verstehen wir die Prozesse, die dazu dienen die Ideen und Erfahrungen der Lernenden aus den Erkundungsprozessen in Einklang zu bringen mit den existierenden Definitionen und Sätzen der Mathematik. Das Sichern meint alle Tätigkeiten, mit denen man sich das konsolidierte Wissen und Können so aneignet, dass langfristig darauf zugegriffen werden kann.

Zwei Kerngedanken stehen im Mittelpunkt der hier vorgestellten Konzeption (Prediger et al. 2011). Es ist zum einen das Explizieren verschiedener Wissensarten und -facetten und es ist zum anderen, dass die Tätigkeiten des Sicherns und Systematisierens bewusst in die Hände der Schülerinnen und Schüler gelegt werden, sie aktiv am Ordnen beteiligt sind.

Warum ist das Systematisieren und Sichern notwendig?

Das Systematisieren und Sichern reagiert auf verschiedene Bedürfnisse und Anforderungen:

1. Reflexionsbedarf: Was ist genau gelernt worden? Erfahrungen werden nur dann zu Wissen und Können, wenn sie bewusst gemacht werden. Das Reflektieren über das Erkundete stellt einen ersten Schritt dazu dar.

2. Vernetzungs- und Strukturierungsbedarf: Wie hängt das Gelernte zusammen und wie kann man es ordnen? Freudenthal spricht dabei vom lokalen Ordnen:

> „Es blieb eben nichts anders übrig, als die Wirklichkeit zu ordnen, Beziehungsgefüge herzustellen und sie bis zu einem Horizont der Evidenz zu führen, der nicht genau festgelegt und recht variabel war. Ich habe diese Tätigkeit die des lokalen Ordnens genannt.“ (Freudenthal 1963, S. 7)

Dabei geht es nicht nur um das Erkennen des einzelnen Begriffs sondern ihn in seiner Abgrenzung zu anderen und seinem Beziehungsgefüge wahrzunehmen. Allein einzelne Kenntnisse ohne eine systematisierende und strukturierende Einordnung führen nur zu isoliertem, bruchstückhaftem, allenfalls additiv wahrgenommenem Wissen.

3. Regularisierungsbedarf: Auch wenn individuelle (Nach-)Erfindungen zentral im Lernprozess sind, bedarf es gemeinsamer Konzepte und einer gemeinsamen Sprache. Diese bilden das Fundament für aufbauende Lernprozesse und sichern die Tragfähigkeit des Gelernten für die Anbindung an gesellschaftlich geteiltes Wissen. Gallin/Ruf 1990 nennen diesen Schritt vom Singulären zum Konsolidierten das Regularisieren.

4. Dokumentationsbedarf: Zu einem Sichern gehört auch das Festhalten, dabei vor allem das Verschriftlichen des Systematisierten und Konsolidierten, das einerseits bewirkt, dass Gedanken ausgeschärft und präzisiert werden und auf das andererseits später zurückgegriffen werden kann.

Der klassische Ansatz, alle wichtigen Sätze und Verfahren in einem Merkheft oder selbst angelegten Wissensspeicher (Brückner 1978) festzuhalten, hat sich bewährt. Jedoch ist eine zentrale Frage im Projekt KOSIMA, inwieweit können die Lernenden sich die Vielfalt der zu sichernden Wissenselemente selbstständig und aktiv aneignen.

Was muss systematisiert und gesichert werden?

Dazu ist es zunächst hilfreich, Wissensformen nach verschiedenen Arten zu unterscheiden, da damit auch verschiedene Arten des Umgehens im Unterricht verbunden sind. Die klassische Unterscheidung zwischen dem Wissen über Fakten, Konzepte und Zusammenhänge (*konzeptuelles Wissen*) einerseits und Handlungswissen und Können (*prozeduralem Wissen*) andererseits gibt eine erste Orientierung (Hiebert & Carpenter 1992). Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, diese verschiedenen Arten des Wissens zu erwerben. Dazu hilft eine Strukturierung wie in Abbildung 1 gezeigt.

Konzeptuelles Wissen bezieht sich sowohl auf Konzepte (z.B. Zahlen, Operationen, Eigenschaften oder Relationen) als auch auf unterschiedliche Arten von Zusammenhängen. Beim prozeduralen Wissen müssen mathematische Verfahren und Algorithmen von handwerklichen Verfahren unterschieden werden. Neben dem Wissen um Konzepte und Prozeduren ist es für langfristigen Wissenserwerb wichtig, metakognitives Wissen für bewusstes Vorgehen aufzubauen, zum Beispiel Strategien und Abläufe bewusst zu machen um sie auf andere Situationen übertragen zu können.

Was daran ? (Facette des Wissens)

Was ? (Art des Wissens)

	Explizite Formulierung	Konkretisierung & Abgrenzung	Bedeutungen & Vernetzung	Konventionelle Festlegung
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte	Definitionen	Beispiele / Gegenbeispiele	Vorstellungen / Darstellungen	Fachwörter Bezeichnungen
Zusammen-hänge	Satz	Beispiele / Gegenbeispiele	(anschauliche) Begründung / Beweis	Namen der Sätze Konventionelle Regeln
Prozedurales Wissen				
Mathematische Verfahren, Algorithmen	Anleitung	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle Fehlerwissen	Vorstellung / Begründung als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten	Nicht begründbare Festlegungen
Handwerkliche Verfahren	Anleitung	Umsetzung, Bedingungen		Nicht begründbare Festlegungen
Metakognitives Wissen (z.B. Strategien des Problemlösens; Schritte beim Modellieren, ...)				

Abb. 1: *Wissenselemente im Mathematikunterricht (Prediger et al. 2011)*

Für den Erwerb der Wissensarten entscheidend sind jeweils unterschiedliche Wissensfacetten (vgl. z.B. Winter 1983, Vollrath 2011), die die Wissenselemente in der Tabelle in Abb. 1 vertikal gliedern.

In Definitionen und Sätzen wird konzeptuelles Wissen *explizit formuliert* und kondensiert, muss jedoch bzgl. des Denkens der Lernenden in weiteren Facetten aufgefächert werden: Winter (1983) betont die Bedeutung eines exemplarischen Begriffsverständnisses als erste Form der Begriffsbestimmung (wie im Beispiel von Abb. 2), über die Lernende sich Begriffe aneignen. Gegenbeispiele dienen dabei auch der Erzeugung von Abgrenzungswissen. Für Verfahren und Sätze kommen dabei auch Bedingungen der Anwendbarkeit hinzu. Zwar nachgeordnet, aber wichtig zu lernen, sind *Konventionen* (z.B. Fachwörter) als weitere Wissensfacetten.

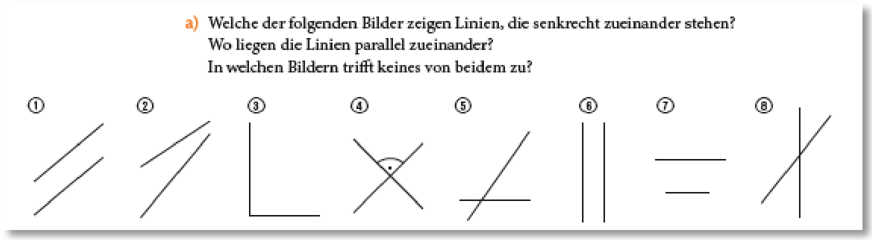

Abb. 2: *„Parallel und Senkrecht“ an Beispielen und Gegenbeispielen (Barzel et al. 2012)*

Inhaltliches und strukturelles Verständnis wird durch die Wissensfacette *Bedeutungen und Vernetzungen* erfasst, zu der z.B. inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen (vom Hofe 1995, Prediger 2009) gehören. Sie ermöglichen *Vernetzungen* zu anderen Wissenselementen (vgl. Vollrath 2001), z. B. durch inhaltlich-anschauliche Begründungen. Diese Systematisierung in Wissensarten und –facetten (sichtbar in jeder Zelle der Tabelle) ermöglicht eine fokussierte Planung des Systematisierens und Sicherns.

Wie wird systematisiert und gesichert?

Die Phase des Systematisierens und Sicherns erfolgt in der Unterrichtspraxis meist im Unterrichtsgespräch unter Lenkung der Lehrkraft. Eine zentrale Frage im Projekt KOSIMA lautet: Inwieweit können die Lernenden aktiv an dem Prozess des Sicherns und Systematisierens teilhaben?

Dazu wird für jedes zu sichernde Wissenselement gezielt nach Aktivitäten gesucht, mit der sich die Lernenden dieses Wissenselement aneignen (*Aneignungshandlung*). Herausgearbeitet wurde ein Spektrum von Aneignungshandlungen, bei der der Grad der Beteiligung der Lernenden sinkt vom kompletten Alleinfinden über Zwischenstufen bis hin zum ausschließlichen Nachvollziehen. Der Beteiligungsgrad steht dabei in Umkehrbeziehung zum Grad der Konvergenz. Abb. 3 zeigt die Aneignungshandlungen für das Wissenselement Konkretisieren von Konzepten, zu dem Bruder (2001) *Identifizieren* und *Realisieren* als zentrale Tätigkeiten nennt.

Konvergenz	**Art der Aneignungshandlung**	**Beteiligung**
Gering	1. **Realisieren** des Konzepts /Satzes: Finde Beispiele und Gegenbeispiele und erkläre, wieso sie (nicht) passen.	Hoch
	2. **Identifizieren** des Konzepts: Welches dieser Beispiele passt zum Konzept, welche nicht? Wieso?	
Hoch	3. Für gegebene Beispiele (Nicht-)**Passung begründen**: Inwiefern ist dies ein Gegenbeispiel? Wieso?	Gering

Abb. 3*: Aneignungshandlungen für das Konkretisieren von Konzepten*

Umsetzung und Herausforderungen

Im Rahmen des Schulbuchs Mathewerkstatt wurden Lernumgebungen zum Ordnen entwickelt. Die Ergebnisse fließen in einen Wissensspeicher, der trotz einer gewissen Vorstrukturierung die Möglichkeit zur individuellen Dokumentation lässt. Inwieweit die jeweiligen Gegenstände wirklich systematisiert und gesichert werden und zu langfristigem Wissen und Können führen, untersuchen wir im Rahmen des KOSIMA-Projekts (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen, vgl. Hußmann et al 2011).

Anmerkungen

Alle Autorinnen und Autoren haben am Projekt gleichberechtigt mitgewirkt.
Literatur in der längeren Fassung des Beitrags unter www.ko-si-ma.de

Literatur

Barzel, Bärbel / Glade, Matthias / Prediger, Susanne / Schmidt, Ulla (2012): Verpackungen – Körperformen beschreiben, herstellen, zeichnen, erscheint in: Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (Hrsg.): mathewerkstatt. Klasse 5. Cornelsen, Berlin.

Barzel, Bärbel / Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2012) (Hrsg.): Mathewerkstatt 5. Cornelsen, Berlin. (Ebenso mit anderer Hrsg-Namenreihenfolge Klasse 6-10).

Bruder, Regina (2001): Mathematik lernen und behalten. In: Pädagogik 53 (10), 15-18.

Brückner, Hubert (1978): Systematische Festigung des grundlegenden Wissens in den Klassen 5 bis 10. Zur Erarbeitung eines Wissensspeichers in den Klassen 5 bis 7, in: Mathematik in der Schule 16(6), S. 310-316.

Freudenthal, Hans (1963): Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: Der Mathematikunterricht 9.

Freudenthal, Hans (1983): Didactical Phenomenology of mathematical structures, Kluwer, Dordrecht.

Gallin, Peter / Ruf, Urs (1990): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz, Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze

Hiebert, James / Carpenter, Thomas (1992): Learning and teaching with understanding. In: D. Grouws (Hg.): Handbook of research on mathematics research and teaching. New York: MacMillan, S. 65–100.

Hußmann, Stephan / Leuders, Timo / Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel (2011): Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen (KOSIMA) – ein fachdidaktisches Forschungs-und Entwicklungsprojekt, erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011.

Wittmann, Erich C. / Müller Gerhard N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Klett, Stuttgart.

Prediger, Susanne (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim, 213-234.

Prediger, Susanne / Barzel, Bärbel / Leuders, Timo / Hußmann, Stephan (2011): Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen, in: Mathematik lehren 164, 2-9.

Vollrath, Hans-Joachim (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Vollrath, Hans-Joachim / Roth, Jürgen (2011): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum.

Winter, Heinrich (1983): Über den Wert begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht der Primarstufe. In: Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 11 (1983) 3, S. 95-102.