

FLORIAN SCHACHT, Dortmund

Individuelle Begriffsbildungsprozesse in inferentialistischer Perspektive

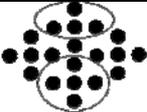
In einer 2009 durchgeführten Studie im Rahmen des Forschungsprojekts KOSIMA wurde genauer untersucht, inwiefern sich der vielfältige Umgang mit statischen und dynamischen Punktmustern zum Aufbau eines mathematisch tragfähigen Variablenbegriffs eignet. Entlang eines Fallbeispiels wird in diesem Beitrag ein Ausschnitt eines individuellen Begriffsbildungsprozesses zum Thema Variablenpropädeutik rekonstruiert. Im Fokus stehen hier zwei Szenen zum Umgang mit statischen und dynamischen Bildmustern. Ziel der Untersuchung ist zunächst, individuelle Begriffsbildungsprozesse auf deskriptiver Ebene explizit zu machen. Erst die genaue Beschreibung individueller begrifflicher Prozesse erlaubt eine Einschätzung zum Potential der Unterrichtsreihe mit Blick auf den Aufbau eines tragfähigen Variablenbegriffs. Das analytische Instrumentarium bilden dabei *individuelle Festlegungen* (vgl. Brandom 2000, Hußmann / Schacht 2009). Diese bilden die Grundlage für eine multiperspektivische Analyse sowohl individueller Begriffsbildungsprozesse als auch der zugrunde liegenden Unterrichtsreihe.

Anzahl von Punkten bestimmen – Propädeutik der Variable

In der Mathematik spielt der Musterbegriff eine herausragende Rolle (vgl. Wittmann 2005). Im Mathematikunterricht kann der vielfältige Umgang mit Mustern, z.B. mit statischen und dynamischen Punktmustern, gerade für die Arithmetik und Algebra und insbesondere für die Propädeutik der Variable in fruchtbarer Weise genutzt werden. Punktmuster sind sowohl mathematische Werkzeuge als auch theoretische Objekte bzw. Repräsentationen abstrakter mathematischer Ideen (vgl. Böttinger / Söbbeke 2009). Um dynamische arithmetische und geometrische Muster genauer zu untersuchen, bedarf es jedoch zunächst eines sicheren Umgangs mit statischen Punktmustern (erste Etappe der Unterrichtsreihe). In einer zweiten Etappe wird dann das Wachstum dynamischer Punktmuster thematisiert. Der Strukturierungsaspekt von Mustern kann sich hier noch tiefgreifender entfalten: Die Regel des Zuwachses wird genutzt, um die Anzahl von Punkten in hohen Folgegliedern zu bestimmen. Für die Beschreibung solcher Wachstumsvorgänge werden im Rahmen der Unterrichtsreihe Terme und Variable genutzt. Vor diesem Hintergrund bildet die intensive Auseinandersetzung mit statischen und dynamischen Punktmustern sowie mit Zahlenfolgen im Rahmen der Unterrichtsreihe die Grundlage für die Einführung der Variable.

Erkenntnisinteresse der Studie ist eine präzise Beschreibung individueller Begriffsbildungsprozesse zur Variablenpropädeutik. Anhand von Fallbeispielen werden exemplarisch begriffliche Prozesse beschrieben. An Orhans Entwicklungsprozessen im Rahmen der Unterrichtsreihe lassen sich wichtige Phänomene beschreiben, die für den Aufbau eines mathematisch tragfähigen Variablenbegriffs von Bedeutung sind, z.B. die Strukturierung und Anzahlbestimmung von statischen und dynamischen Punktmustern.

Als Orhan zu Beginn der Unterrichtsreihe im Unterricht mit der Aufgabe konfrontiert wird, wie viele Punkte in dem Muster in Abb. 1 zu sehen sind, zählt er die Punkte zunächst einzeln ab. Die Mitschülerin Ariane unterbricht ihn: „Da musst du doch nicht zählen. Das sind $4 \cdot 5!$ “. Orhan notiert nach kurzer Zeit in sein Heft: „Im Bild sind 20 Punkte. Oben sind 4 Punkte und unten sind 5 Punkte. Und die beide nehme ich mal.“ Später umkreist er jeweils 4 und 5 Punkte (vgl. Abb. 1). In einer Analyse der Szene wurden Orhans Festlegungen rekonstruiert. Individuelle Festlegungen sind kleinste Einheiten von Urteilen, mit denen das Subjekt Aussagen über seine Weltwahrnehmung formuliert. Mit jeder Festlegung wird das individuelle Wissen neu strukturiert und zugleich eine Position bezogen, für die man Gründe angeben können muss bzw. aus denen sich weitere Festlegungen ableiten. Festlegungen sind individuell und müssen nicht wahr sein. Orhan geht in dieser Szene folgende Festlegungen ein: *Ariane kann ein Produkt finden, das es erlaubt, das Muster zu strukturieren* sowie *Die Faktoren des*

 <p>Abb. 1: Orhan: „$4 \cdot 5 = 20$“</p>	<p>Orhans Hefteintrag: „<i>Im Bild sind 20 Punkte. Oben sind 4 Punkte und unten sind 5 Punkte. Und die beide nehme ich mal.</i>“</p>
--	--

Produktes lassen sich in der Zeichnung abtragen. Diese beiden Festlegungen berechtigen Orhan nun zu einer weiteren und neuen Festlegung: *Die Faktoren des Produkts kann man im Muster finden.*

Festlegungen als kleinste Analyseeinheiten

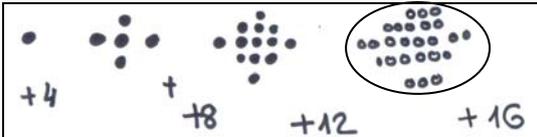
Anhand dieses Beispiels kann das Potential von Festlegungen für die Analyse individueller Begriffsbildungsprozesse genauer beschrieben werden: sie eignen sich sowohl zur Beschreibung lokaler Phänomene in gewissen Situationen (Kurzzeit-Perspektive) als auch zur Beschreibung von Entwicklungsprozessen wie z.B. der Entstehung neuer Festlegungen (Langzeit-Perspektive). Festlegungen adressieren keinen bestimmten epistemischen Status, sondern meinen jede Art von Urteil. Diese vorab nicht kategorisierende Perspektive ermöglicht, individuelle Begriffsbildungsprozesse sowohl als individuelle Vorstellungsentwicklungen zu beschreiben als auch zugrundeliegende Interaktionsmuster mit zu berücksichtigen.

Das obige Beispiel verdeutlicht, inwiefern die Rekonstruktion individueller Festlegungen Hürden im Umgang mit statischen Punktmustern auf lokaler Ebene (in Kurzzeit-Perspektive) explizit machen kann. Diese Festlegung, dass die zwei Faktoren 4 und 5 disjunkte Teilmengen im Muster darstellen, ist mathematisch nicht tragfähig. Insbesondere formuliert er nicht die Festlegung, dass das Produkt 4·5 als Bündelung von 4 gleichmächtigen Teilmustern aufgefasst werden könnte.

Das obige Beispiel gibt darüber hinaus Einblick in die Entstehung neuer Festlegungen. Deutlich wird dabei, dass neue Festlegungen diskursiv vor dem Hintergrund des eigenen Erfahrungshorizontes entstehen. Von besonderem Interesse ist dabei die Entstehung neuer Festlegungen. Festlegungen sind analytische Einheiten des Inferentialismus (Brandom 2000). Festlegungen werden durch weitere Festlegungen (sog. Berechtigungen) gestützt und können weitere Festlegungen implizieren. Vor dem Hintergrund dieser epistemologischen Annahme lassen sich Begriffsbildungsprozesse als die Entwicklungen individueller Festlegungen rekonstruieren. Arianes Festlegung ist Anlass für Orhan, die Faktoren des Produktes 4·5 im Muster zu finden. Das Ergebnis ist zwar mathematisch nicht tragfähig, jedoch in dieser Situation viabel. Orhans neue Festlegung (s.o.) entsteht somit vor dem Hintergrund sowohl von Arianes Festlegungen als auch seiner eigenen. Mit Festlegungen lassen sich somit nicht nur individuelle Vorstellungsentwicklungen beschreiben, sondern auch Interaktionsmuster rekonstruieren.

Dieses Beispiel verdeutlicht eine weitere Eigenschaft der analytischen Einheit der Festlegung: Sie steuern den individuellen Begriffsgebrauch. Orhans Multiplikationsbegriff in dieser Situation liegt die Festlegung zugrunde, dass die Faktoren eines Produkts zwei disjunkte Punktmengen in einem Muster darstellen (vgl. Abb. 1). Mit Blick auf die Verwendung von Begriffen fragt Brandom (2000 S. 253): „Was tun wir, wenn wir etwas aussagen, behaupten oder eine Erklärung abgeben? Die allgemeine Antwort lautet, daß wir eine bestimmte Art von *Festlegung* eingehen.“ Es soll an dem folgenden Beispiel aus einem Interviewmitschnitt noch einmal verdeutlicht werden, inwiefern das Eingehen mathematisch nicht tragfähiger Festlegungen bei statischen Punktmustern sich auf den Begriffsbildungsprozess zur Variablenpropädeutik auswirken kann.

Ausblick

 <p>Abb. 2: Aufgabe: 3 Muster sind gegeben. Zeichne das vierte Muster!</p>	<p>Orhans Festlegung: <i>Vielen dynamischen Punktmustern liegen arithmetischen Regelmäßigkeiten zugrunde, die man für die Anzahlbestimmung des nächsten Musters nutzen kann.</i></p>
--	--

Auftrag an Orhan in dieser Szene war, das Muster fortzusetzen und nach den gegebenen ersten drei Mustern das vierte zu zeichnen. Von zentraler Bedeutung in den dynamischen Situationen ist die Bestimmung der Regel des Zuwachses. Orhan zählt in dieser Situation zunächst jeweils zwei Muster ab und bildet Differenzen. Dann formuliert er die Regel: „Es kommen erst 4, dann 8, dann 12 Punkte hinzu: 4er Reihe.“ Obwohl Orhan dieses komplexe Wachstumsverhalten präzise benennen kann, hat er Probleme, das vierte Muster zu zeichnen. Eine Analyse dieser und ähnlicher Szenen und die Rekonstruktion der zugrundeliegenden Festlegungen ergeben, dass Orhan dynamischen Punktmustern wesentlich arithmetische Regelmäßigkeiten zuschreibt und dass er diese für die Anzahlbestimmung der nächsten Muster nutzt. Hürden sind bei der Identifizierung geometrischer Regelmäßigkeiten erkennbar. Die Analyse zeigt, dass sich das Eingehen der nicht tragfähigen Festlegung aus Abb. 1 in Langzeit-Perspektive auf die Bewältigung komplexerer Situationen (Abb. 2) auswirkt: Obwohl Orhan in dieser Szene auf hohem arithmetischem Niveau argumentiert, gelingt es ihm nicht, die geometrische Regelmäßigkeit für die Fortführung zu nutzen.

Im Hinblick auf den Aufbau eines tragfähigen Variablenkonzeptes erweist sich der vielfältige Umgang mit statischen und dynamischen Punktmustern als fruchtbar. Es zeigt sich auch, dass Hürden im Begriffsbildungsprozess z.T. auf andere nicht tragfähige Festlegungen zu anderen Zeitpunkten zurückgeführt werden können. So werden individuelle Begriffsbildungsprozesse rekonstruierbar als Entwicklungen individueller Festlegungsstrukturen sowohl in Kurzzeit- als auch in Langzeitperspektive.

Dieses Projekt ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

- Brandom, Robert B. (2000): *Expressive Vernunft. Begründung, Repräsentation und diskursive Festlegung.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Böttinger, Claudia / Söbbeke Elke (2009): *Growing Patterns as Examples for Developing a new View onto Algebra and Arithmetic.* In V. Durand-Guerrier (Ed.), *European Research in Mathematics Education VI. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Lyon, France.
- Hußmann, Stephan / Schacht, Florian (2009): *Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen.* In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.* S. 339-342. Münster: WTM.
- Wittmann, E. Ch. (2005): *Eine Leitlinie zur Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar)-Mathematik als Wissenschaft von Mustern.* *Der Mathematikunterricht* 50, H.2/3, 5 – 22.