

Abschätzungen im Verkehr – Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen



Didaktischer Hintergrund zum Kapitel.....	ab Seite 2
Einstieg	ab Seite 6
Erkunden	ab Seite 8
Ordnen	ab Seite 14
Vertiefen	ab Seite 20
Kompetenzen und Checkliste	ab Seite 31
Materialübersicht für dieses Kapitel.....	ab Seite 33

Herausgegeben von:

Timo Leuders
Susanne Prediger
Bärbel Barzel
Stephan Hußmann

Autoren:

Bärbel Barzel
Michael Marxer

Redaktion:

Raja Herold-Blasius

© 2018 Kosima-Projekt:

Zitierbar als Barzel, Bärbel & Marxer, Michael (2018): Abschätzungen im Verkehr – Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen. In: Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.): Handreichungen zur Mathewerkstatt 10. Dortmund/ Freiburg/ Essen. Online unter: www.ko-si-ma.de.

© 2018 Cornelsen Schulverlage GmbH: Berlin.

Das Copyright gilt für alle dargestellten Seiten und Auszüge von Seiten des Schülerbuches und des Materialblocks der *mathewerkstatt*; Rechteinhaber und Bildquellen sind in den entsprechenden Bildnachweisen dieser Produkte ausgewiesen.

Titel Abschätzungen im Verkehr – Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen

Thema Quadratische Gleichungen

Kontexte – Kernfragen – Kernidee

Im offenen Kontext „Abschätzungen im Verkehr“ stellen sich vielfältige Probleme, in denen Größen oder Formen mit quadratischen Funktionen beschreibbar sind: Ist der „Unfallverursacher“ zu schnell gefahren? Passen die Brückenteile wirklich zusammen? Wann ist der Benzinverbrauch am geringsten? Diese kontextuellen Fragen führen zur Notwendigkeit, unbekannte Werte nicht nur ungefähr anhand von Graphen und Tabellen, sondern möglichst genau zu bestimmen und damit zur Notwendigkeit des Gleichungslösens. Damit wird die folgende Kernidee entwickelt: „Unbekannte Eingabewerte in quadratischen Funktionen kann man mit Tabellen und Graphen, aber auch durch das Lösen von Gleichungen über das Rückwärtsrechnen und weitere Lösungsverfahren bestimmen.“, „Gemeinsame Werte kann man im Graphen und durch Gleichsetzen bestimmen.“, „Besondere Werte braucht man zur Lösung von vielen Problemen (die sich zu spezifischen Problemsituationen zusammenfassen lassen).“

Kernfrage A: Wie kann ich in quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Die Länge des Bremsweges lässt sich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit berechnen. Im Rückschluss kann anhand von Bremswegen (Brems Spuren) auf die Geschwindigkeit geschlossen werden. Durch das Ablesen an Graphen und Rückwärtsrechnen in Gleichungen lässt sich dieser Schritt vollziehen. Aufbauend auf diesen inhaltlichen Wegen wird mit der bereits explizierten Kernidee eine Vielzahl an Wegen zum Lösen von quadratischen Gleichungen entwickelt und deren Flexibilisierung angeregt.

Kernfrage B: Wie kann ich gemeinsame Werte bestimmen?

Ausgehend von Problemen beim Brückenbau kann die Suche nach gemeinsamen Werte und damit nach Schnittpunkten mit Tabellen und Graphen vorgenommen werden, aber auch durch eine quadratische Gleichung dargestellt und gelöst werden.

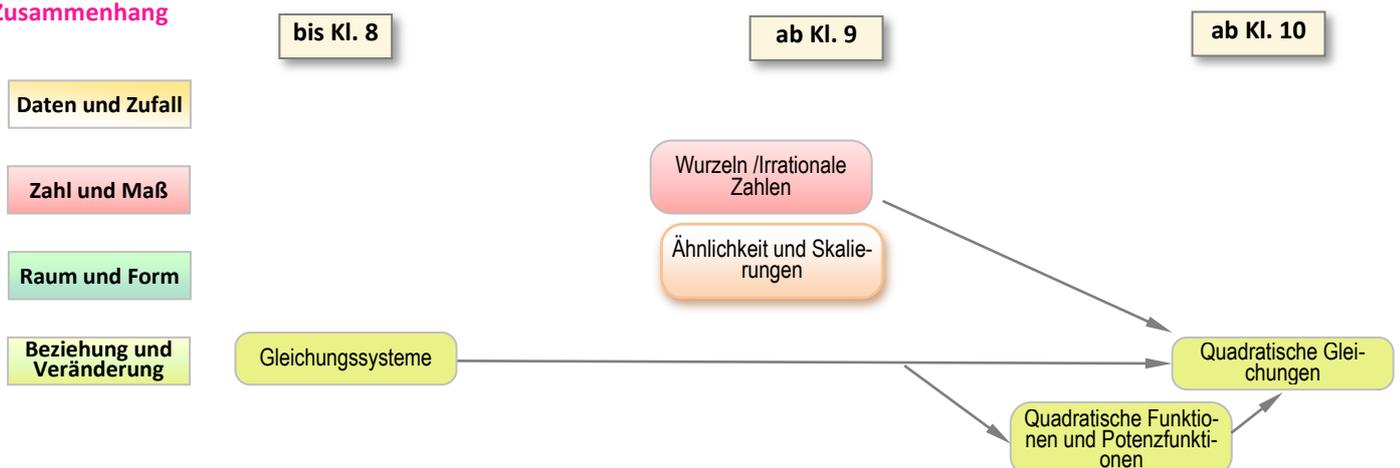
Kernfrage C: Wie kann ich besondere Werte bestimmen?

Extremwerte und andere besondere Werte sind wichtig für Problemlösungen (z.B. Wann ist der Benzinverbrauch am geringsten?). Die Etappe fokussiert besondere Punkte als Kernelement der Deutung von Graphen, Tabellen und Gleichungen und systematisiert die Vielzahl der Problemsituationen, der besonderen Werte / Punkte und der Wege, wie man diese bestimmen kann.

Kompetenzen

- K1: Ich kann eine quadratische Gleichung lösen durch Ablesen am Graphen.
 K2: Ich kann eine Gleichung, bei der der quadratische Term in Scheitelpunktform steht, durch Rückwärtsrechnen lösen.
 K3: Ich kann eine quadratische Gleichung rechnerisch lösen und dazu einen passenden Lösungsweg auswählen.
 K4: Ich kann am Graphen erklären, wann eine quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösung hat und kann dazu Beispiele angeben.
 K5: Ich kann die Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen.
 K6: Ich kann eine quadratische Gleichung aus den Angaben einer Problemstellung aufstellen.
 K7: Ich kann besondere Punkte einer Parabel (Schnittpunkte mit den Achsen, Scheitelpunkt) bestimmen und ihre Bedeutung im Kontext erklären.
 K8: Ich kann die Schnittpunkte zweier Parabeln oder einer Parabel mit einer Geraden bestimmen.

Zusammenhang



Struktur

ca. 4 Wochen

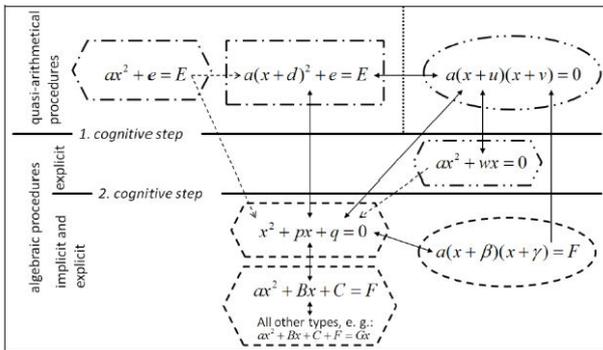
Abschätzungen im Verkehr – Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen				15-	30
A Wie kann ich bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte bestimmen?				E	O
E1	Erkunden, dass der Anhalteweg aus zwei Teilen besteht, man erst nach einer Weile („Reaktionszeit“) mit dem Bremsen beginnt		V1- V10 Unbekannte Werte mit verschiedenen Darstellungen bestimmen	45	30
E2 E2	Bremswege beim Auto bestimmen $b = \frac{v^2}{100}$ graphisch, tabellarisch, Rückwärtsrechnen/ Wurzelziehen	O1 Einfache Gleichungen (geg: f(x), ges: x) aufstellen und mit Tabelle, Graph und Rückwärtsrechnen lösen; 2 Lösungen Gleichungen der Form $b = \frac{v^2}{100}$		45	25
E3	Bremswege beim Motorrad bestimmen $b = \frac{(v-7)^2}{100}$ graphisch, tabellarisch, Rückwärtsrechnen/ Wurzelziehen	O2 Durch Rückwärtsrechnen / Wurzelziehen (graphisch, probieren, Wurzel aus Variable - 2 Lösungen) O3 Quadratische Gleichungen erkennen/ Nullprodukt		20	20
E4	Faustformel für den Anhalteweg = Reaktionszeit+Bremsweg $s = v \cdot \frac{3}{10} + \frac{v^2}{100}$	O4 O4 Hinführung zur p-q-Formel Lösungen O5 Anzahl Lösungen reflektieren	V11- V16 Verschiedene Wege zum Lösen von quadratischen Gleichungen	25	45
		O6 Günstigen Lösungsweg wählen	V17 -V23 Flexibel und effizient quadr. Gleich. lösen		20
					15
B Wie kann ich gemeinsame Werte bestimmen?				E	O
E5	Hinführung Schnittpunkte zweier Parabeln: tabellarisch, graphisch	O7 Mögliche Fälle der Anzahl an Schnittpunkten untersuchen zwischen Parabeln und Geraden	V24 - V28 Schnittpunkte finden	35	45
E6 E6	Lagebeziehung zweier Parabeln bzw. Parabel/ Gerade			20	
E7	Gleichsetzen von Termen (f(x)=g(x)) im Kontext Treffpunktproblematik			20	
C Wie kann ich besondere Werte bestimmen				E	O
E8 E8	Extremwerte im Graphen ablesen (Optimaler Benzinverbrauch)	O8 Gleichungen aufstellen, um besondere Werte zu finden	V29 - V44 – Besondere Werte finden/ verschiedene Kontexte	15	30
E9	Isoperimetrisches Problem		V45 - V46 – Gleichungen mit höheren Potenzen lösen	30	

Kurzweg: E1 bis E4 – O1 bis O6 – E6 – O7 – E8 bis E9, O8

Intensivzugriff

Hintergrund

Das Kapitel greift Wege zum Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen auf und ergänzt vielfältige Wege zum Lösen von quadratischen Gleichungen. Das rechnerische Lösen von quadratischen Gleichungen stellen hohe Strukturierungsanforderungen an Lernende, insofern Gleichungen verschiedener Form bewusst unterschieden werden müssen, damit die verschiedenen Rechenstrategien anwendbar werden (vgl. folgende Abb. aus Block 2016).



In Schülersprache umgesetzt ergeben sich daraus die folgenden Wege zum Lösen quadratischer Gleichungen. Ziel ist die Kompetenz, je nach Struktur der Gleichung den effizientesten Weg auszuwählen und zu nutzen. Dies wird im Kapitel schrittweise aufgebaut.

Für schnelles Lösen allgemeiner Gleichungen.	p-q-Formel anwenden
Zum Überprüfen und Verstehen.	Graphisch lösen
Für verstehbares Lösen allgemeiner Gleichungen.	Quadratisch ergänzen
Für das Lösen einfacher Gleichungen $ax^2+e=E$ oder der Form $a(x+d)^2+e=E$.	Rückwärtsrechnen
Für schnelles Lösen für Gleichungen der Form $a(x+u)(x+v)=0$ und analogen Gleichungen höheren Grades.	Nullprodukt nutzen

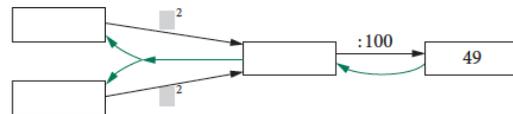
„Quadratisch Ergänzen“ ist notwendig, um die Voraussetzung zum „Rückwärtsrechnen“ bei Gleichungen in der allgemeinen Form herzustellen. Im Umgang mit den verschiedenen Strategien ist eine Flexibilisierung intendiert, also die Auswahl des günstigsten Verfahrens für die jeweilige Gleichung. Zudem wird immer wieder eine Vernetzung mit der graphischen Darstellung angeregt.

Etappe A: Wie kann ich bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte bestimmen?

Zum Einstieg wird in **E1** und **E2** zunächst bewusst eine funktionale Perspektive eingenommen, indem die Auswirkung der Geschwindigkeit auf die Länge des Anhalteweges bzw. Bremsweges untersucht wird. Dabei unterstützt das Applet in **E1**, im simulierten Kontext zu erkennen, dass sowohl ein linearer Anteil (Reaktionsweg) als auch ein nicht-linearer Teil (Bremsweg) vorliegt.



Auf dieser Grundlage dieser erfassten funktionalen Abhängigkeit kann dann die Frage nach unbekanntem Geschwindigkeiten (x) gestellt werden, hier zunächst nur hinsichtlich des Zusammenhangs $b(x) = x^2/100$, für die organisch das Ablesen am Graphen als Lösungsweg zur Verfügung steht. Die Entwicklung von Rechenwegen wird zunächst durch das von den linearen Gleichungen bekannte Modell des Rückwärtsrechnens gestützt, bevor dann rein symbolisch ohne die Notation von Hin- und Rückweg gearbeitet wird. Bei Problemen kann aber immer wieder auf das Modell zurückgegriffen werden. Neu ist gegenüber den linearen Gleichungen, dass zwei unterschiedliche Werte zur Lösung führen können, was visualisiert und explizit in **O1** und **O2** geordnet wird.

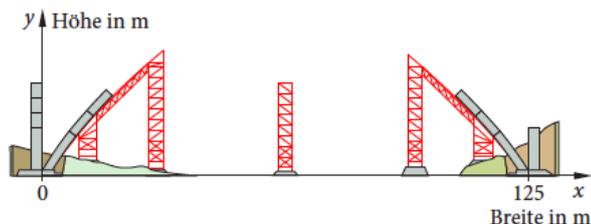


In **E3** ($b(x) = (x-7)^2/100$) und **E4** ($a(x) = 3/10x + x^2/100$) werden dann weitere Typen von Gleichungen im Kontext motiviert, die die Ausweitung und die Entwicklung weiterer Wege motivieren. In **O3** wird „Nullprodukt nutzen“ als weiterer Lösungsweg und in **O4** die „p-q-Formel“ schrittweise aufgebaut. Um Auswahl günstiger Lösungsverfahren unter Ökonomieaspekten geht es in **O6**. Unterbrochen wird die Progression auf der Ebene der Rechenstrategien durch die Anbindung an das (zunächst nur vorgestellte) graphische Lösen in **O5**, das die Bedeutung der abstrakten Zeichen der quadratischen Gleichungen nochmal bewusst stärken soll und auch die Deutung der Lösungsmenge stützt:

keine Lösung	eine Lösung	zwei Lösungen
Die Lösungsmenge ist leer.	Die Lösungsmenge besteht aus einer Zahl.	Die Lösungsmenge besteht aus zwei Zahlen.
Beispielgleichung: $(x-2)^2 = -1$	Beispielgleichung: $(x-2)^2 = 0$	Beispielgleichung: $(x-2)^2 = 1$
Beispielskizze: 	Beispielskizze: 	Beispielskizze:

Etappe B: Wie kann ich gemeinsame Werte bestimmen?

Beim Bauen von Brückenbögen muss man an den Rändern anfangen. Dass bei großen Breiten von Brücken hierbei Probleme beim Aneinandersetzen entstehen ist naheliegend und wird in **E5** als Anlass genutzt, Lagebeziehungen von (Teil-)Parabeln zu untersuchen.



In **E6** wird die Untersuchung der Graphen systematisch durchgeführt und in **E7** ein Rechenansatz motiviert. Alle Überlegungen zu Lagebeziehungen, Rechenwegen und Deutungen der Lösungsmengen werden in **O7** gesichert.

kein gemeinsamer Schnittpunkt	$\begin{cases} a) = x^2 + 3 \\ b) = 2x - 1 \end{cases}$		$x^2 + 3 = 2x - 1 \quad -2x + 1$ $x^2 - 2x + 4 = 0$ $x_1 = 1 + \sqrt{1-4}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{1-4}$ keine Lösung.
ein gemeinsamer Schnittpunkt	$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 \\ g(x) = 2x + 2 \end{cases}$		$x^2 + 3 = 2x + 2 \quad -2x - 2$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x_1 = 1 + \sqrt{1-1} = 1 + \sqrt{0} = 1$ und $x_2 = 1 - \sqrt{1-1} = 1 - \sqrt{0} = 1 \quad \mathbb{L} = \{1\}$
zwei gemeinsame Schnittpunkte	$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 \\ h(x) = 2x + 3 \end{cases}$		$x^2 + 3 = 2x + 3 \quad -2x - 3$ $x^2 - 2x = 0$ $x \cdot (x-2) = 0$ $x_1 = 0$ und $x_2 = 2 \quad \mathbb{L} = \{0, 2\}$

Etappe C: Wie kann ich besondere Werte bestimmen

Wann ist der Benzinverbrauch am kleinsten? Wann ist die umzäunte Fläche am größten? Diese (aber auch ganz andere Fragen) führen auf „besondere Werte“ (Extrempunkte, Achsenschnittpunkte von Graphen). Die Vernetzung von Problemen und diesen Punkten als Antworten auf diese Problemfragen muss mit geeigneten Berechnungswegen (unter anderem Lösen von Gleichungen, bestimmen von Scheitelpunkten) vernetzt werden. Diese vernetzenden Problemsituationen werden am Beispiel von Extremwertproblemen in **E8** und **E9** motiviert und in **O8** gesichert.

Kurzweg

E1 bis **E4** – **O1** bis **O6** – **E6** – **O7** – **E8** bis **E9**, **O8**

Die quadratischen Gleichungen gehören zu den anspruchsvollen Elementen der Algebra in der Sekundarstufe I. Sie sind nicht in allen Lehrplänen oder Prüfungsvorgaben in dieser Allgemeinheit vorgesehen. Kürzbar sind am besten einzelne inhaltliche Elemente wie das Bestimmen von gemeinsamen Werten und das Lösen von Extremwertproblemen, die eine Mathematisierung erfordern (vgl. **E9**). Die Frage nach besonderen Werten ist zu zentral als dass sie komplett wegfallen sollte, auch wenn hier abhängig von den Lehrplänen eine Reduzierung auf graphisches Lösen denkbar ist.

Diagnose

- Vernetzen die Lernenden die verschiedenen Darstellungen geeignet und nutzen graphische Darstellungen und das Einsetzen zur Kontrolle und zur Sicherung ihres Verständnisses?
- Gelingt – abhängig von den Lernzielen der Lernenden – eine Flexibilisierung der Rechenwege zum Lösen quadratischer Gleichungen?

Literatur

Block, J. (2016). Flexible algebraic action on quadratic equations. In: Krainer, K. & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME9)*. Prag: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. 391-397.

Einstiegsseite Abschätzungen im Verkehr – Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen

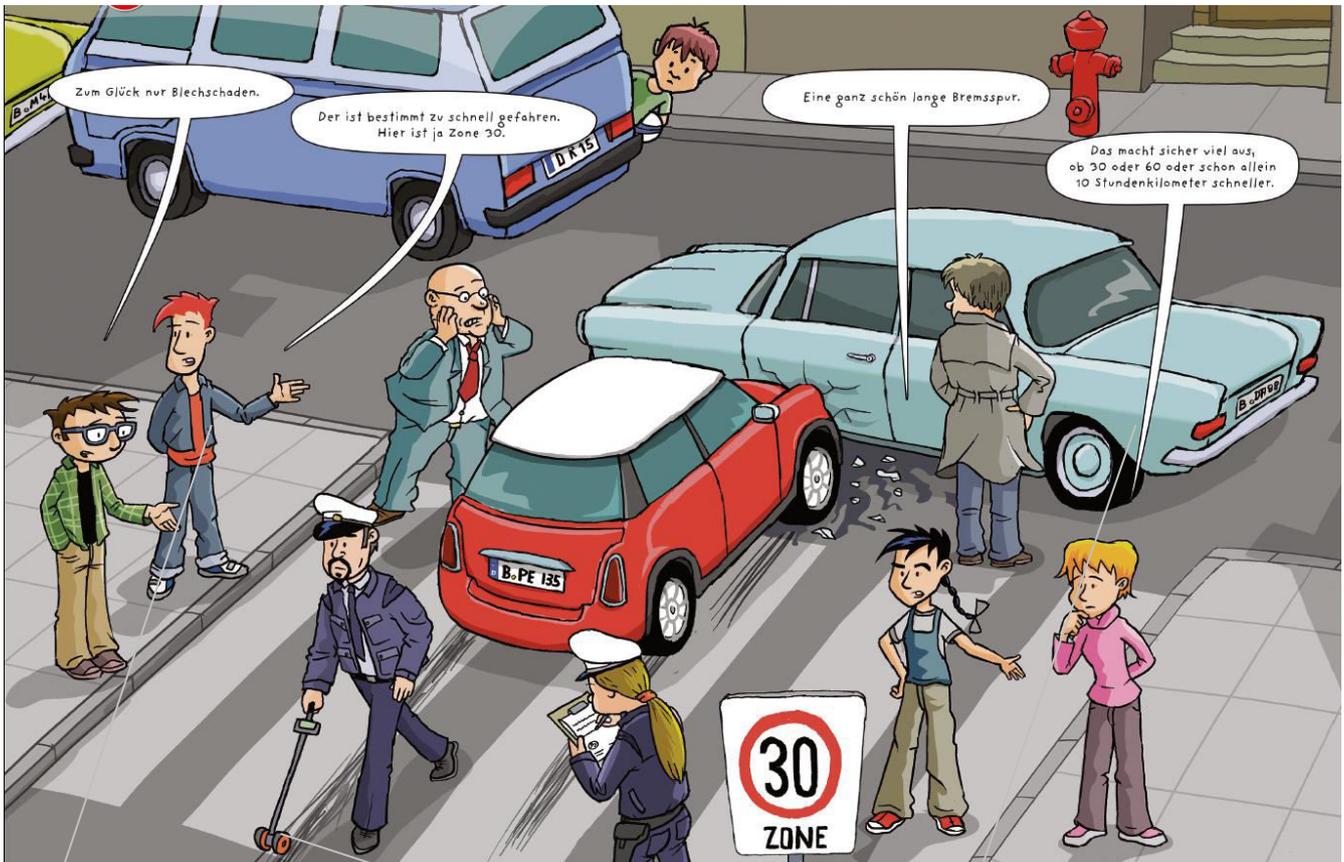
<p>Ziele Die Schülerinnen und Schüler...</p> <ul style="list-style-type: none"> • denken sich in den Kontext „Abschätzungen im Verkehr“ ein. • äußern erste Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Anhalteweg (Reaktionsweg und Bremsweg). <p>Bezug Weiter mit E1. Hier wird die Abhängigkeit des Anhalteweges von der Zeit anhand einer Simulation erkundet.</p> <p>Vorbereitung/Material Evtl. Auftaktseite auf Folie ziehen. (digitales Angebot). Aktuelle Unfallstatistik, z. B. auch über junge Fahrer könnte hier oder später den Kontext unterstützen.</p>	<p>Umsetzungsvorschlag (15-30 min inkl. erster Reflexion)</p> <p>Gemeinsame Betrachtung der Einstiegsseite, UG Klärung des Unfallszenarios.</p> <hr/> <p>Individuelle Auseinandersetzung mit dem EA Einstiegsproblem unter der fokussierten Betrachtung der Unfallanalyse.</p> <hr/> <p>Austausch über mögliche Unfallursachen und GA Vorgehensweisen.</p> <hr/> <p>Diskussion der möglichen Ergebnisse sowie UG der Vorgehensweisen.</p> <p>HA: zur Festigung V1, V2</p>
---	--

Intensivzugriff Umsetzungshinweise/Alternativen

Die Einstiegsseite dient als Einstimmung in die Situation, dass von der gefahrenen Geschwindigkeit auf den Anhalteweg bzw. auf die Bremsspur geschlossen werden kann.

Lernwege

Die Einstiegsseite „Abschätzungen im Verkehr“ soll einen angemessenen Kontext liefern, der anschließend in **E1**, **E2** sowie **E3** dazu genutzt werden kann, den neuen Gleichungstyp systematisch zu erkunden. Hier muss zunächst erfolgreich fokussiert werden, welche Größe sich sinnvoll in Abhängigkeit einer anderen Größe verstehen und dann später darstellen lässt.



Tills Aussage ist ein Hinweis auf die Beziehung zwischen einer erhöhten Geschwindigkeit und der daraus verlängerten Bremsspur.

Die Vermessung der Bremsspur und Merves Hinweis auf deren Länge sind zentrale Aspekte des Kontexts, nach denen gefragt werden sollte, wenn Sie nicht genannt werden: „Warum wird die Länge gemessen?“

Die Spekulationen von Pia sollen auch die Lernenden anregen über Auswirkungen einer Veränderung der Geschwindigkeit auf den Anhalteweg nachzudenken.

Ziele des Kapitels aus Vorschauerspektive

In diesem Kapitel ...

- werden Situationen durch quadratische Gleichungen beschrieben.
- unterschiedliche Wege thematisiert, um unbekannte Werte in quadratischen Gleichungen zu bestimmen.
- werden Werte von quadratischen sowie linearen Funktionen und Gleichungen bestimmt.

Erkunden A

Wie kann ich bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

E1 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erfahren im Kontext, den funktionalen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Anhalteweg;
- nutzen die Tabelle oder die graphische Darstellung im Rahmen des systematischen Probierens;
- reflektieren die Veränderungen der abhängigen Variablen im Vergleich zur unabhängigen Variable.

E1 Bezug

direkt weiter mit **E2**, **V1**, **V2**

Vorbereitung/ Material

Nutzen der App (Link im Buch) auf der Basis von Cinderella (www.cinderella.de).

E1 Umsetzungsvorschlag (45 min)

- | | | |
|----|--|----|
| a) | Vortex lesen und Kennenlernen der vorgegebenen Simulation | UG |
| b) | Tabellarische Darstellung der gefahrenen Gesamtstrecke abhängig von der Fahrzeit | PA |
| c) | Graphen zeichnen, Funktionstyp tippen | PA |
| d) | Systematisches Erkunden des funktionalen Zusammenhanges anhand der APP. | PA |
| e) | Unterscheidung Bremsweg, Reaktionsweg und Beschreibung mit Funktionen. | UG |

Intensivzugriff

E1 Umsetzungshinweise/Alternativen

Bei Aufgabenteil **1d)** bietet sich an, die Betrachtung des Anhalteweges in Reaktionsweg und Bremsweg zu unterteilen.

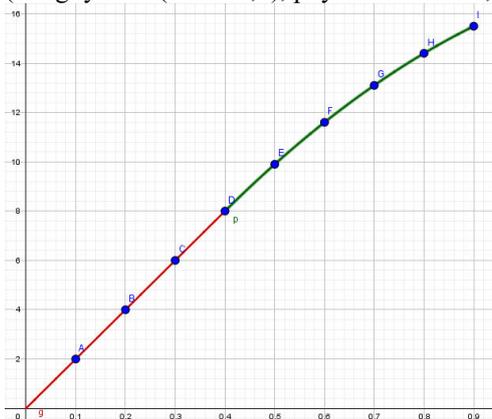
E1 Erwartungshorizont

b) Die Schülerinnen und Schüler setzen die angedachte Tabelle selbstständig fort und notieren die zugehörige Gesamtstrecke, die durch die Simulation angezeigt wird. Mögliche Tabelle: (vorgegebene Geschwindigkeit 2m/0,1s)

s	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
m	2	4	6	8	9,9	11,6	13,1	14,4	15,5

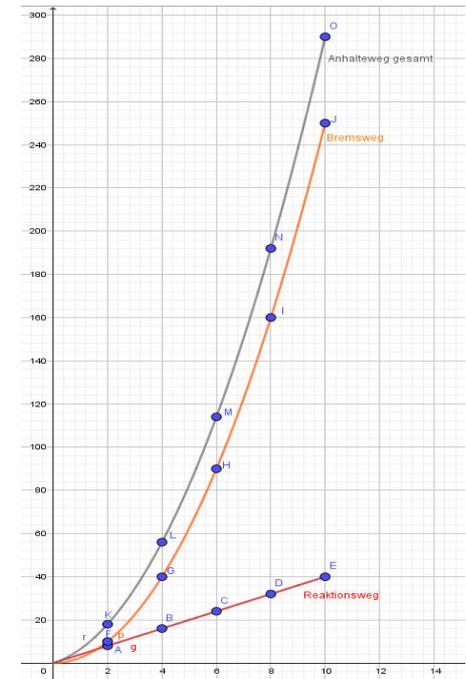
c) Die Tabelle aus **b)** kann hierzu in ein Koordinatensystem im Heft oder, mit ein wenig Übung, in eine Geometrie-Software übertragen werden.

(mit $g: y=20x$ ($0 \leq x \leq 0,4$); $p: y=-10x^2+28x-1,6$ ($0,4 \leq x \leq 0,9$))



d) Eine Verdoppelung (Verdreifachung) der Zeit bewirkt eine Vervielfachung (Verneunfachung) des Bremsweges.

m/0,1s	2	4	6	8	10	12	14	16	18
m _{Reak}	8	16	24	32	40	Für diese Geschwindigkeiten reicht die Darstellung der Simulation nicht aus.			
m _{Brems}	10	40	90	160	250				
m _{gesamt}	18	56	114	192	290				



(mit $g: y=4x$; $p: y=2,5x^2$; $r: y=2,5x^2 + 4x$ ($0 \leq x \leq 10$))

E1 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten entstehen, wenn Lernende

- den Aufbau der Simulation nicht verstanden haben.
- kein oder unzureichendes Vorwissen im Bereich des funktionalen Zusammenhanges, dem Erstellen von Wertetabellen oder Graphen haben.

E1 Diagnose

Gelingt es den Bremsweg im Applet abzulesen?

Werden Punkte richtig in ein Koordinatensystem übertragen?

Werden relevante Eigenschaften von quadratischem und linearem Anteil formuliert?

Erkunden A Wie kann ich bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

E2|E2 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- erfahren im Kontext den funktionalen Zusammenhang zwischen gefahrener Geschwindigkeit und Bremsweg;
 - lösen quadratische Gleichungen im Kontext rückwärts auf;
 - Reflektieren innermathematische Probleme im Zusammenhang mit quadratischen Gleichungen.

E2|E2 Bezug

Nach E1. Weiter mit O1, V3-V5.

E2|E2 Umsetzungsvorschlag (45 min)

- | | | |
|--------------|---|--------|
| ab) | Austausch zu Einschätzungen zum Einfluss von Geschwindigkeitsänderungen auf den Bremsweg | GA |
| c) b) | Kontextgebundene Betrachtung einer quadratischen Gleichung zur Bewertung des Aufgabenteils 2a). | EA/GA |
| d) c) | Rückwärtslösen quadratischer Gleichungen im Kontext. | GA |
| d) | Begründung der doppelten innermathematischen Lösung durch das Rückwärtslösen. | GA/UG |
| e) e) | Formel zur Umkehroperation erstellen zum direkten Ablesen des Bremsweges. | UG |
| - f) | Reflexion des außermathematischen Einflusses auf die Länge des Bremsweges. | (GA)UG |

Mögliche HA: O1ab) oder V3, V4, V5

Intensivzugriff

E2|E2 Umsetzungshinweise

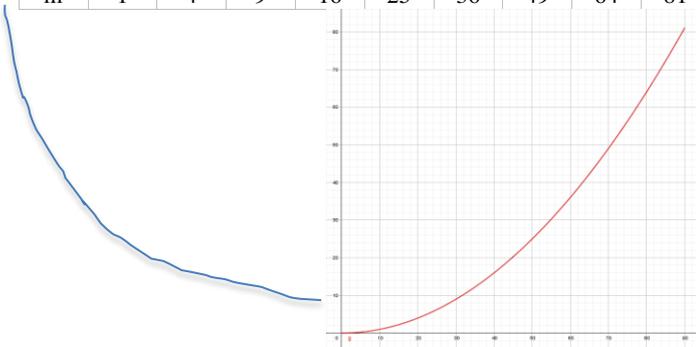
Auf die gesuchte doppelte Lösung in den Aufgabenteilen 2c) und 2d) kann auf Grund des Vorwissens zum Umgang mit negativen Zahlen, anhand eines „vollständig“ gezeichneten Graphens geschlossen werden.

Neben dem oben angesprochenen Umsetzungsvorschlag bietet sich ebenfalls die Bearbeitung in einer kooperativen Methode, in einer Gruppen- oder Partnerarbeit an.

E2|E2 Erwartungshorizont

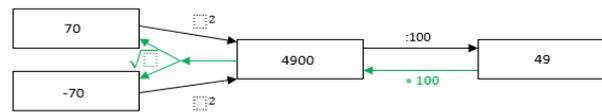
b)

km/h	10	20	30	40	50	60	70	80	90
m	1	4	9	16	25	36	49	64	81



mit $g: y = \frac{x^2}{100} \quad (0 \leq x \leq 90)$

c)



d) Sowohl $(70)^2$ als auch $(-70)^2$ führen zum selben Ergebnis, im Graph gibt es zwei Lösungen. In dem außermathematischen Kontext, Geschwindigkeiten, können nur positive Zahlen interpretiert werden.

e) Nach dem Umstellen der Gleichung mit unveränderten Variablen: $\sqrt{100 \cdot b} = x$

f) Reibung (Straßenbelag, Lagerung der Reifen und Achsen, Wetter), Fahrzeugausstattung (Bremsanlagen, Bremsassistent BAS/ ABS), FahrerIn (Notfallbremsung, Reaktionszeit), u.v.m.

E2|E2 Differenzierung

Aufgabenteil f) kann zur zeitlichen Differenzierung genutzt werden. Die Basisaufgabe strukturiert stärker vor (Einstiegsdialog reduziert und konkretes Beispiel vorgegeben, Graph und Struktur der Tabelle vorgegeben).

E2|E2 Diagnose

Werden Funktionswerte richtig berechnet? Werden geeignete Umkehroperationen gefunden? Ist bei c) verständlich, warum es zwei Lösungen geben kann? Inwieweit gelingt das Rückwärtsrechnen, das Finden der Umkehrformel?

Erkunden A

Wie kann ich bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

E3/E4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- lernen weitere quadratische Gleichungen kontextgebunden kennen und lösen Sie durch Rückwärtsrechnen;
- kombinieren lineare und quadratische Gleichungen und erkennen die Notwendigkeit neuer Verfahren.

E3/E4 Bezug

Nach **E2** und **O1**. Weiter mit **O2**, **O3** und **V3-V6**.

E4 Vorbereitung/Material

Evtl. Applets (010-1) zur Messung der Reaktionszeit.

E3 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|----|--|-------|
| a) | Kennenlernen einer neuen quadratischen Gleichung im Kontext Bremsweg | GA |
| b) | Rückwärtsrechnen mit der neuen quadratischen Gleichung. | EA/UG |
| c) | Reflexion der Teilaufgabe 3b) . | UG |

Mögliche HA: **O1** oder **V3-5**

E4 Umsetzungsvorschlag (25 min)

- | | | |
|----|---|---------------|
| a) | Bestimmen des Reaktionsweges. | UG/GA |
| b) | Lineare Gleichung zur Bestimmung des Reaktionsweges und dessen Vergleich mit a). | EA/UG |
| c) | Kombination linearer und quadratischer Gleichung zur Bestimmung des Anhalteweges. | UG
PA (GA) |
| d) | Reflexion der Umkehraufgabe zu 4c) . | UG |

Mögliche HA: **O2** oder **V3-6**

Intensivzugriff

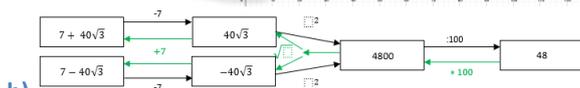
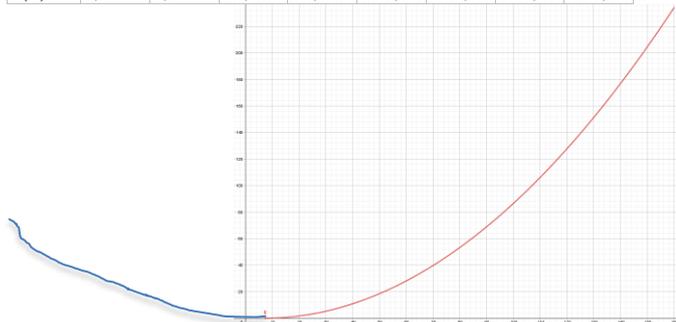
E3 Umsetzungshinweise

Die Verwendung von Tabellenkalkulation und dynamischer Geometrie-Software kann informelles Lösen erleichtern, hilft aber nicht bei neuer Termstruktur.

E3 Erwartungshorizont

a)

x	10	20	60	80	120	140	150	160
b(x)	0,09	1,69	28,09	53,29	127,69	176,89	204,49	234,09



- b)
- c) Man muss am Ende noch 7 addieren.

$$x = \pm \sqrt{100 * b(x) + 7}$$

Nur positives Ergebnis relevant.

E4 Diagnose

Stimmt die Hinrichtung? (Stufigkeit des Terms erkannt?)

E4 Umsetzungshinweise

Die Relevanz der Reaktionszeit sollte zunächst gemeinsam herausgestellt werden. Gut auf die Einheiten achten.

E4 Erwartungshorizont

a) $0,26s \cdot 20 \cdot \frac{1000}{60 \cdot 60} m/s = 1,44 m$

b) $20 \cdot \frac{3}{10} = 6 (m)$

Geschw	20	40	60	80	100	120	140
Reaktionswe	6	12	18	24	30	36	42
Bremsweg	4	16	36	64	100	144	196
Anhalteweg	10	28	54	88	130	180	238

- c) In einer quadratische Gleichung dieser Form lässt sich die Unbekannte nicht rechnerisch isolieren. Wir können bislang nur tabellarisch oder graphisch lösen.

E4 Differenzierung

Schwache Schülerinnen und Schüler können durch die Verwendung des Applets unterstützt werden. Schnellere Schülerinnen und Schüler können die Teilaufgabe **d)** bearbeiten.

E4 Lernwege

Eigene Bestimmung des Reaktionsweges in **a)** erfordert aufwendiges Umformen der Einheiten, das für die Faustformeln nicht nötig ist, da die Ergebnisse als Meter interpretiert werden. Da die Aufgabe in **c)** nicht lösbar ist, ist hohe Eigenständigkeit erforderlich.

Erkunden B Wie kann ich gemeinsame Werte bestimmen?

Schnellzugriff

E5 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- bestimmen Schnittpunkte von Parabeln geometrisch und tabellarisch.
 - Stellen passende Gleichungen zur Bestimmung von Schnittpunkten auf.

E5 Bezug

Nach **Erkunden A** und **Ordnen A**, nach **E4** und **O6** weiter mit **E6** und **V24-V26**.

E5 Vorbereitung/Material

Zur Wiederholung Wissenspeicher *Funktionen 9*, DGS-Datei (s. Link zum Webcode)

E5 Umsetzungsvorschlag (35 min)

- a) Bezug zwischen Form einer Brücke und den charakteristischen Merkmalen einer Parabel (spezifische Punkte, Parameter) GA
-
- b) Annäherung und Verstehen des geschilderten Problems durch Darstellungswechsel Tabelle → Graph. EA/UG
-
- c) Darstellungswechsel Funktionsgleichung → Graph als Grundlage zur genaueren Betrachtung des Problems (Software z. B. Geogebra notwendig) UG
In „nachgedacht“ wird die rechnerische Lösung angeregt

Mögliche HA: **E7** und **V24–V26**.

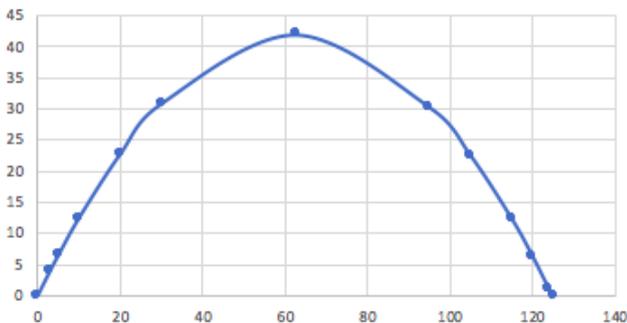
Intensivzugriff

E5 Umsetzungshinweise

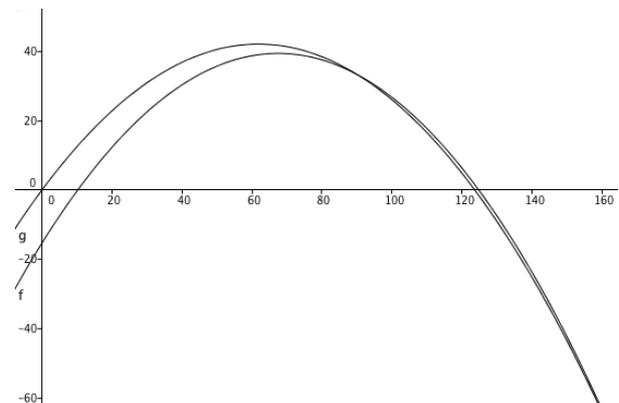
Die Problematik und technische Herausforderung, dass ein Brückenbau stets von zwei Seiten aus gleichzeitig begonnen werden muss, sollte als Anreiz zur Bearbeitung der Aufgabe vorangestellt werden. Die verschiedenen Darstellungen sollten auch als Anregung zur Diskussion dienen, welche Vorgehensweisen praktikabel, genauer, fehleranfälliger sind.

E5 Erwartungshorizont

- a) Symmetrie. Treffen im Scheitelpunkt.
b)



Scheitelpunkt liegt mittig zwischen Werten mit gleichem Funktionswert, also ungefähr bei $x \approx \frac{95+30}{2} = 62,5$ und $y \approx 40$



Schnittpunkt (90/33,3) kann grob oder genauer abgelesen werden. Das Aufeinandertreffen in der Schräge dürfte ungünstig sein, wünschenswert wäre ein Treffen beim Scheitelpunkt.

$$f_1(x) = f_2(x)$$

E5 Differenzierung

Die Arbeit auf verschiedenen Darstellungsebenen ermöglicht es, dass das dargestellte Problem je nach Präferenz unterschiedlich bearbeitet wird.

E5 Lernwege

Die Bearbeitung der Teilaufgabe **c)** setzt aufgrund der relativ komplizierten Parameter die Verwendung geeigneter Software voraus. Das Zeichnen von Hand erlaubt nur eine grobe Darstellung der Situation.

Erkunden B Wie kann ich gemeinsame Werte bestimmen?

Schnellzugriff

E6 / – | E6/E7 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erkennen den Bezug zwischen den Schnittpunkten zweier Graphen und gemeinsamer Werte zweier Gleichungen,
- können Lagen von Graphen unterscheiden,
- erkennen die Bezüge und die Unterschiede zur (prinzipiell bekannten) Vorgehensweise beim Bestimmen gemeinsamer Werte von linearen Funktionen

E6/E7 Bezug

Nach E5.

E6 Vorbereitung/Material

- ggf. größere Bilder der verschiedenen Brücken als Bild an der Tafel oder projiziert, um im UG entsprechende Stellen besser zeigen und markieren zu können.
- Bereitstellung von Schablonen mit den charakteristischen Bögen und Geraden, um Fallunterscheidungen beim Schnitt der Graphen herausarbeiten zu können (012-2 bzw. 228-2).
- Oder: Bereitstellung der DGS-Datei 012-1 bzw. 228-1 (Baden-Württemberg) mit entsprechendem Applet

E6 | E6 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|----|---|-------|
| a) | Betrachtung der Brückenbilder, Herausarbeiten der Gemeinsamkeiten und der Unterschiede | PA |
| b) | Erarbeitung der möglichen Lagebeziehungen (in Basisversion an vorgegebenen Beispielen). | PA |
| c) | Unterschiede zwischen den verschiedenen Fällen herausarbeiten (in Basisversion schon Arbeit an Rechenverfahren) | PA-UG |

E7 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|----|--|----------|
| a) | Aufstellen der Funktionsgleichung g (Merve) und Bestimmung des Treffpunkts | EA/PA |
| b) | Auseinandersetzung mit den beiden Ansätzen (Ich-Du-wir) | EA/PA/UG |
| c) | Strukturanalogie herausarbeiten. | UG |

Intensivzugriff

E6 | E6 Umsetzungshinweise

Die möglichen Lagen sollten nicht nur verbalisiert festgehalten werden, sondern in strukturierter Form, z. B. einer Tabelle.

	Gerade	Parabel
Gerade	1 oder kein Schnittpunkt	...
Parabel

Die Basisaufgabe ist stärker konkretisiert und bietet einen Vorgriff auf die Berechnungsansätze aus E7., so dass die in der Basisversion arbeitenden Lernenden einen zeitlichen Vorteil haben.

E6 Erwartungshorizont

Unsystematische Version von Wissenspeicher *Funktionen 16*

E6 | E6 Differenzierung

Über Basisaufgabe.

E6 | E6 Lernwege

Häufig werden die Fälle, die keinen Schnittpunkt ergeben, vergessen. Diese Gefahr besteht insbesondere auch deshalb, weil im verwendeten Kontext diese Fälle nicht vorkommen können. Deshalb kann ein Hinweis gegeben werden, dass beim Arbeiten mit den Schablonen auch andere Fälle (losgelöst vom Kontext Brücke) untersucht werden sollen.

E7 Umsetzungshinweise

Einen Schwerpunkt der Besprechungen kann bilden, dass die unterschiedlichen Darstellungsformen einen unterschiedlichen Zweck erfüllen (graphisch: Überblick über die Situation, algebraisch: Genauigkeit)

E7 Erwartungshorizont

$g(x) = 120x$

x	0	5	6	7	8	9	10	11
g(x)	0	600	720	840	960	1080	1200	1320
f(x)	1250	0	50	200	450	800	1250	1800

$120x = 50(x-5)^2$ $120x = 50x^2 - 500x + 25$ $50x^2 - 620x + 25 = 0$
 $x^2 - 12,4x + 0,5 = 0$ $x_{1,2} = 6,2 \pm \sqrt{6,2^2 - 0,5}$
 $x_1 \approx 12,36; x_2 \approx 0,4$, (x_2 im Modell sinnlos)
 Wenn beide gleich weit gekommen sind, ist der Unterschied zwischen den zurückgelegten Strecken null.

E7 Diagnose

Die Unterscheidung zwischen konstanter und beschleunigter Bewegung kann schwerfallen. Eine inhaltliche Annäherung über einzelne Werte hilft.

Erkunden C

Wie kann ich besondere Werte bestimmen?

Schnellzugriff

E8/E9 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- erkennen, wie Funktionen zur Darstellung von Zusammenhängen genutzt werden können.
- erkennen, wie Mathematik helfen kann, optimale Lösungen (optimale Werte) zu erkennen
- können diese optimalen Werte aus geeigneten Darstellungen (z. B. Graphen) entnehmen und sinnvoll interpretieren

E8/E9 Bezug

nach E7

E8 Vorbereitung/Material

Schild für Tafel / Folie mit Verkehrszeichen:
Tempolimit 30 km/h

E8 Umsetzungsvorschlag (15 min)

- | | | |
|------------|--|-------|
| ab) | Graphen erstellen und Werte ablesen | EA/PA |
| bc) | Herausarbeiten der Kriterien in EA, anschließend Zusammentragen der Erkenntnisse im UG | PA/UG |

E9 Umsetzungsvorschlag (30 min)

- | | | |
|------------|--|----------|
| ab) | Text gemeinsam lesen und diskutieren, Vorgehen von Till und Pia beschreiben und fortführen | UG
PA |
| c) | Umsetzung in graphische Darstellung aufgrund der Überlegungen aus b) | EA |
| d) | Ablösung vom Kontext, Übertragung auf innermathematische Begriffe | PA/UG |
| e) | Validieren des rechnerischen Ergebnisses: (PA) UG | |

Intensivzugriff

E8 Umsetzungshinweise

Bei der Diskussion über den Sinn von 30 km/h-Zonen darf die Geschwindigkeitsbeschränkung nicht hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Energieeinsparung betrachtet werden!

Hier muss klargestellt werden, dass es primär um Sicherheits- und Gesundheitsaspekte für die anderen Verkehrsteilnehmer geht.

E8 Erwartungshorizont

Auf die richtige Bezeichnung der Achsen achten.

E8 Differenzierung

Ggf. können solche Optimierungsfunktionen auch für andere Verkehrsmittel dargestellt werden.

E9 Umsetzungshinweise

Für die motivierte Mitarbeit ist vor allem wichtig, dass das Problem als Optimierungsproblem verstanden wird. Deshalb sollte die Situation zu Beginn in einem kurzen gemeinsamen Gespräch deutlich gemacht werden. Dabei sollte auch die funktionale Beziehung zwischen Länge und Breite (bei vorgegebener Gesamtlänge) angesprochen werden. Anschließend ist die Weiterarbeit in PA möglich und sinnvoll.

E9 Erwartungshorizont

Der Einstieg wird häufig über den (empfohlenen) Weg der Erstellung einer Tabelle erfolgen. Bereits hier wird deutlich, dass zwischen Länge und Breite eine funktionale Abhängigkeit besteht. In der weiteren Bearbeitung wird diese Abhängigkeit durch eine entsprechende Gleichung formalisiert.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot (25 - 2x) = -2x^2 + 25x \\ &= -2 \left(x - 6\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{625}{8} \end{aligned}$$

E9 Differenzierung

In der Basisversion wird das systematische Probieren in einer Tabelle und das Aufstellen einer Funktionsgleichung angeleitet.

Ordnen A

Wie kann man bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

O1/O2 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- Stellen einfache Gleichungen auf und lösen diese mit Tabellen, Graphen und Rückwärtsrechnungen;
- Wiederholen und systematisieren kennengelernte Verfahren aus der Einführung.

O1/O2 Bezug

Wissenspeicher

Nach E1/ E2, weiter mit O2 oder V3-V5.

O1 Vorbereitung/Material

Materialblock Wissenspeicher MB1

O2 Vorbereitung/Material

Materialblock Wissenspeicher MB2

Nach E2, weiter mit E3.

O1 Umsetzungsvorschlag (25 min)

- a) Bestimmung fehlender Werte PA
-
- b) Auswertung und Vernetzung zu a) PA/UG
Hinweis: Druckfehler im Schülerbuch. Es geht um Anzahl Lösungen von ① und ②

Mögliche HA: V3, V4

O2 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- a) Selbständiges, durch Materialblock MB2 EA angeleitetes Arbeiten
-
- b) Vergleich der Bearbeitungen der beiden Aufgaben (Tippfehler: nicht b) und c) sondern die beiden Aufgaben aus Wissenspeicher)

Mögliche HA: V3, V4

Intensivzugriff

O1 Erwartungshorizont

a) Werte einsetzen und Gleichungen lösen für lineare Gleichung mit Hilfe von Tabellen, Graphen und Termen: $f(4) = 5$ und $f(x) = 4$ für $x = 3,5$. Anschließende Probe.

Werte einsetzen und Gleichungen lösen für quadratische Gleichungen mit Hilfe von Tabellen, Graphen und Termen: $f(-1) = 3$ und $f(x) = 0,75$ für $x = +/- 1/2$. Anschließende Probe.

b) Vergleich der Gleichungstypen und der Lösungen. Symbolische und graphische Interpretation des Entstehens der Lösungen.

O1 Differenzierung

Schwächere Schülerinnen und Schüler können auf die entsprechenden Wissenspeicher zurückgreifen, um ihr Wissen wiederaufzufrischen.

O1 Diagnose

Werden Werte richtig eingesetzt und (lineare/ quadratische) Gleichungen richtig gelöst?

Werden relevante Eigenschaften von quadratischen und linearen Funktionen formuliert?

O2 Erwartungshorizont

Erkennen und begründen die Existenz von zwei Lösungen auf der graphischen und auf der symbolischen Ebene.

O2 Differenzierung

Schüler, die bei der Lösung keine Schwierigkeiten haben, können anschließend mit Gleichungen arbeiten, die auf Fallunterscheidungen hinführen (keine Lösung, nur eine Lösung)

O2 Diagnose

Wenn das Zeichnen der passenden Graphen nicht gelingt, muss auf entsprechende Wiederholungen aus dem Kapitel „Quadratische Funktionen“ zurückgegriffen werden.

① Wert einsetzen Geg.: x | Ges.: $f(x)$

Lineare Funktionen
Beispiel: $f(x) = 2x - 3$
Wie groß ist $f(x)$ bei $x = 4$?

Quadratische Funktionen
Beispiel: $f(x) = 3x^2$
Wie groß ist $f(x)$ bei $x = -1$?

in der Tabelle oder am Graphen ablesen

x	f(x)
1	-1
2	1
4	5

x	f(x)
-1	3
0	0
1	3

Term

$f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$
Kontrollieren: Stimmt, Es passt zum Graphen.

$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$
 $f(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$
 $f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$
Kontrollieren: Stimmt, Es passt zum Graphen: $f(-1) = 3$.

② Gleichung lösen Geg.: $f(x)$ | Ges.: x

Lineare Funktionen
Beispiel: $f(x) = 2x - 3$
Bei welchem x ist $f(x) = 4$?

Quadratische Funktionen
Beispiel: $f(x) = 3x^2$
Für welche x ist $f(x) = 0,75$?

in der Tabelle oder am Graphen ablesen

f(x)	x
4	3,5
2	2,5
-1	1

f(x)	x
0,75	0,5
0,75	-0,5
0	0

Term

$2x - 3 = 4 \quad | +3$
 $2x = 7 \quad | :2$
 $x = 3,5$
Kontrollieren: $f(3,5) = 4$ Stimmt. Es passt zum Graphen.

$3x^2 = 0,75 \quad | :3$
 $x^2 = 0,25 \quad | \sqrt{\quad}$
 $x = 0,5$
 $x = -0,5$
Kontrollieren: Stimmt, Passt zum Graphen: $f(0,5) = 0,75$; $f(-0,5) = 0,75$.

Ordnen A

Wie kann man bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

O3 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- lernen quadratische Gleichungen in unterschiedlichen Formen kennen;
- nutzen das Nullprodukt zur Lösung einer quadratischen Gleichung.

O3Bezug

Nach **E1-E3**, **O1/ O2** und **V1-V2**. Weiter mit **E4** und **O4/ O5**.

O3 Vorbereitung/Material

Zur Wiederholung Wissensspeicher MB1 und MB2
Materialblock Wissensspeicher MB2

O3 Umsetzungsvorschlag (40 min)

- | | | |
|----|--|----|
| a) | | EA |
| b) | Vernetzung mit dem Vorwissen zu quadr. Gleichungen und dem Rückwärtslösen. | PA |
| c) | Erarbeitung der Regel zum Nullprodukt | UG |
| d) | Anwendbarkeit des Nullprodukts bei unterschiedlichen Formen von quadratischen Gleichungen. | UG |
| e) | Erzeugung von Fehlerwissen zur Abgrenzung der Verwendung des Nullproduktes. | UG |
| f) | Beziehung zwischen Nullprodukt und Nullstellen | UG |
| g) | Reflexion der Beziehung zwischen Nullprodukt und Nullstellen. | UG |

Mögliche HA: O3e), V11-12.

Intensivzugriff

O3 Umsetzungshinweise

Die Gleichung können auf Karten an die Tafel geheftet und sortiert werden.

O3 Erwartungshorizont

- a) Quadr. Gleichungen: 1, 2, 3, 5, 6, 8
- b) Scheitelpunktsform (1;8) Lösbar über Rückwärtsrechnen
Produktform (2;3;5) durch Ausmultiplizieren erkennbar.
Normalform (6)
- c) Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Die Lösungen lassen sich dann so bestimmen: z.B. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.
- d) Nullprodukt nutzen bei: 1 (Quadrat umschreiben), 2, 4 (2 hebt sich auf), 5, 6 (Erkennen der binom. Formel & Quadrat umschreiben), 7, 8 (Quadrat umschreiben), 9, nur 3 nicht.
- e) Die Nutzung des Nullproduktes ist nur möglich, wenn das Produkt wirklich 0 ist.
- f) $f(x)=0$; $x^2-2x-8=0$; $(x+2)(x-4)=0$. $x_1+2=0$ und $x_2-4=0$,
 $x_1=-2$ und $x_2=4$
- g) -.

O3 Differenzierung

Schwächere Schülerinnen und Schüler können auf die entsprechenden Wissensspeicher (Gleichung 2, sowie MB1) zurückgreifen, um ihr Wissen wiederaufzufrischen. Schnellere Schülerinnen und Schüler suchen weitere Beispiele und Gegenbeispiele zur Anwendung des Nullproduktes

O3 Diagnose

Werden reinquadratische Gleichungen sowie quadratische Gleichungen in der Scheitelpunktform erkannt und durch Rückwärtslösen gelöst?

Werden die Bedingungen für die Anwendung des „Nullproduktes“ erkannt?

O3 Lernwege

Mögliche Schwierigkeiten:

- Äquivalenzumformungen
- Beziehung zwischen Nullprodukt und Nullstellen zu erkennen.

Ordnen A

Wie kann man bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

O4|O4 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- leiten die quadratische Ergänzung her.
- folgern die pq-Formel aus dem Zusammenhang der quadratischen Ergänzung.

O4|O4 BezugNach **E3/E4**, **O2/O3** und **V13-16**.**O4|O4 Vorbereitung/Material**Zur Wiederholung Wissensspeicher *Funktionen 15*
Materialblock Wissensspeicher MB2**O4|O4 Umsetzungsvorschlag** (45 min)

a) a) Normalform in Scheitelpunktform umformen und Rückwärtsrechnen	EA UG
- b) Problematisierung und geführte Erarbeitung der quadratischen Ergänzung (Basisversion: Interpretation von Ergebnissen)	PA
- c) Herleitung der pq-Formel durch allgemeines Lösen.	UG
ü d) Anwendung der pq-Formel	HA
d) e) Vergleichende Reflexion der vorangegangenen Arbeitsschritte	UG

Mögliche HA: V13-16

Intensivzugriff

O4 UmsetzungshinweiseDie Schritte aus **b)** gründlich aufarbeiten.Nach **b)** noch zwei weitere Beispiele bearbeiten lassen, bevor die Verallgemeinerung in **c)** vollzogen wird.Mit **c)** kann man den Nutzen und die Berechtigung von Lösungsformeln reflektieren.**O4 Erwartungshorizont****a)** Finden der binomischen Formel und Rückwärtslösen der bekannten Scheitelpunktform.**b) (1)** Das absolute Glied ergänzt nicht zur bekannten binomischen Formel und kann auf Grund dessen nicht wie in **a)** gelöst werden.**b) (2)** Ergänzung zur binomischen Formel $(x+4)^2 - 16 + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+4)^2 - 4 = 0$ **b) (3)** Reflexion der quadr. Ergänzung durch die Nullsumme von $+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.**c)** Herleitung der pq-Formel durch die allgemeine Anwendung der quadratischen Ergänzung.

d) $x_{1/2} = \frac{-1,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1,5}{2}\right)^2 - (-1)}$

$x_1 = 2 \vee x_2 = -0,5$

e) Nutzen der quadratischen Ergänzung zum Erstellen der Scheitelpunktform und der Herleitung der pq-Formel.**O4 Differenzierung**Über Basisaufgabe. Schwächere Schülerinnen und Schüler können durch ein Wiederholungsangebot (*Funktionen 15*) unterstützt werden.**O4 Diagnose**

Kann die Normalform einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform überführt werden?

Im Folgenden auch: Wird die Struktur der p-q-Formel richtig genutzt?

$x^2 + 8x + 12 = 0$ $x^2 + 8x + 16 - 16 + 12 = 0$ $(x+4)^2 - 16 + 12 = 0$ $(x+4)^2 - 4 = 0 \quad +4$ $(x+4)^2 = 4 \quad \text{Wurzel finden}$ $x_1 + 4 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 + 4 = -2 \quad -4$ $x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = -6$ $\mathbb{L} = \{-6; -2\}$	$x^2 + px + q = 0$ $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$ $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad -q$ $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q \quad + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \text{Wurzeln finden}$ $x_1 + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad -\frac{p}{2}$ $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ <p>Dies nennt man die p-q-Formel, um die Lösungen von quadratischen Gleichungen zu bestimmen.</p>
---	---

Ordnen A

Wie kann man bei quadratischen Zusammenhängen unbekannte Werte finden?

Schnellzugriff

O5/O6 Ziele

Die Schülerinnen und Schüler...

- bestimmen Lösungsmengen mit Hilfe unterschiedlicher Darstellungsformen (z. B. am Graphen ablesen);
- reflektieren die Entstehung unterschiedlicher Lösungsmengen;
- wählen ein günstiges Lösungsverfahren.

O5/O6 Bezug

Nach **E4** und **O4** weiter mit **V20-23**.

O5/O6 Vorbereitung/Material

Normalparabel auf Folie und Blatt mit Koordinatengitter (auf gleich Skalierung achten!)

O5 Umsetzungsvorschlag (20 min)

- | | | |
|----|---|-------|
| a) | Bestimmen der Lösungsanzahl durch unterschiedliche Darstellungen. | EA/PA |
| b) | Graphisches Lösen. | PA |
| c) | Explizieren des Diskriminantenkriteriums | UG |
| d) | Anzahlen von Nullstellen im quadratischen Zusammenhang. | HA |
| e) | Reflektion der Arbeitsschritte b) und d) . | UG |

Mögliche HA: V20-23

O6 Umsetzungsvorschlag (15 min)

- | | | |
|-----|--|--------|
| a) | Diskutieren, welche Lösungswegen zu wählen sind je nach Form der quadratischen Gleichung | EA |
| bc) | Reflektion der allg. Anwendbarkeit der pq-Formel. | PA/ UG |

Mögliche HA: V20-23

Intensivzugriff

O5 Erwartungshorizont

a)	(1)	(2)	(3)
	$x_{1/2} = \pm\sqrt{3} - 1$	$x_{1/2} = \pm 2 + 3$	$x_{1/2} = \emptyset$
	$x_{1/2} = \pm\sqrt{2} - 1$	$x_{1/2} = \pm 2 + 1$	$x_{1/2} = \emptyset$
	$x_{1/2} = -1$	$x_{1/2} = \pm 2$	$x_{1/2} = \emptyset$
	$x_{1/2} = \emptyset$	$x_{1/2} = \pm 2 - 1$	$x_{1/2} = \pm 3$
	$x_{1/2} = \emptyset$	$x_{1/2} = \pm 2 - 3$	$x_{1/2} = \pm 4$

- c)
- $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$: 2 Lösungen
- $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$: 1 Lösung
- $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$: 0 Lösungen

O5 Differenzierung

Bieten Sie die Parabelschablone als Stütze an, wenn die Aufgabe im Kopf nicht bearbeitbar ist.

Beispiele kontrastieren, um den Sinn der Aufgabe greifbar zu machen.

O5 Lernwege

Es sollte beobachtet werden, ob die Schüler versuchen, die Aufgabenstellung mit der p/q-Formel zu bearbeiten. Für das hier angestrebte Verständnis wäre diese Vorgehensweise nicht sinnvoll, insbesondere für das in dieser Klassenstufe zunehmend geforderte funktionale Verständnis

O5 Diagnose

Es können Schwierigkeiten beim Bestimmen der Lage des Graphen auftreten. Hier ist eine Wiederholung der entsprechenden Aufgaben aus dem Kapitel „Quadratische Funktionen“ angeraten. Tipp: Pflegen Sie das graphische Lösen (oder Zeichnen) im Kopf in den kommenden Wochen z. B. als kurzer Einstieg (5 min) in die Stunde.

O6 Umsetzungshinweise

Die Aufgabe erst bearbeiten, wenn die Lernenden schon einige Erfahrung mit den Strategien gemacht haben.

O6 Erwartungshorizont

- a) 1. Rückwärts 2. (Rückwärts, Graphisch) 3. Nullprodukt 4./5. p-q-Formel
- b) Die p-q-Formel ist immer anwendbar, wenn die Gleichung evtl. passend mit Nullen aufgefüllt werden. Andere Verfahren sind dann aber schneller und weniger fehleranfällig.

Ordnen B

Wie kann man gemeinsame Werte bestimmen?

Schnellzugriff

O7 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- verstehen, warum die Koordinaten der Schnittpunkte von zwei Graphen die Lösungen für *beide* Gleichungen sind,
 - können durch Fallunterscheidungen die Anzahl der gemeinsamen Lösungen begründen,
 - können kategorisieren, wie viele gemeinsame Lösungen beim Schnitt unterschiedlicher oder gleicher Funktionstypen möglich sind.

O7 Bezug

Nach O6.

O7 Vorbereitung/Material

Evtl. Parabel- und Geradenschablonen

O7 Umsetzungsvorschlag (45 min)

a)	Untersuchen von Lagebeziehungen	EA/PA
c)	Klären, dass gemeinsame Werte beide Gleichungen erfüllen	PA
d)	Untersuchung auf Vollständigkeit	PA/UG
e)	Erkennen das und Reflexion, wann eine quadratische Gleichung entsteht	UG
f)	Diskussion von komplexem Beispiel	PA/UG

Mögliche HA: V24 – V28

Intensivzugriff

O7 Umsetzungshinweise

Für die Erarbeitung der verschiedenen Kombinationen sollte viel Raum gelassen werden. Dies könnte damit beginnen, dass die möglichen Kombinationen zunächst ohne zugrundeliegende Funktionsgleichungen erkundet werden. Die vorbereiteten Schablonen auf Folie (2x Parabel, 1 x Gerade) helfen bei der Ausföhrung.

Anschließend sollten diese Erfahrungen entlang den Vorgaben von Aufgabe 7abc konkretisiert werden. Eine entsprechende Systematik bietet der Wissenspeicher Funktionen 16. Es wird von der Verschiedenheit der mathematischen Objekte ausgegangen; die Identität wird nicht thematisiert.

O7 Erwartungshorizont

(Siehe Funktionen 16)

7e) „Ist das immer so, dass sich eine quadratische Gleichung ergibt?“ Nein, Beispiele: $x^2=x^2+4$; $x^2=(x-2)^2$, ...

7f) Auch wenn es augenscheinlich nur einen Schnittpunkt gibt ist oberhalb bei ca $x=6,5$ einen weiteren, wie man mit der Nutzung eines Funktionenplotters und der Zoom-Funktion überprüfen kann. Theoretischere Begründung: Parabeln haben (maximal) zwei Schnittpunkte. Bei gleich orientierten Parabeln, gibt es einen Schnittpunkt, nur wenn sie „gleich gestreckt“ sind (dann verlaufen sie im gleichen Abstand). Erkennbar nähern sich die Graphen für $x>4$ einander an.

O7 Differenzierung

Schwächere Schüler können sich auf das Ausprobieren ohne Funktionsgleichung mit den Schablonen beschränken.

O7 Diagnose

In dieser Phase kann gut überprüft werden, ob der Darstellungswechsel zwischen Funktionsgleichung und Funktionsgraph sicher beherrscht wird. Ggf. muss auf Vertiefenaufgaben bzw. den Wissenspeicher aus dem Kapitel „Quadratische Funktionen“ zurückgegriffen werden.

Graphen	Lage	Beispiel	Skizze der Graphen	Gleichung und Lösung
Gerade und Gerade	parallel zueinander	$f(x) = 2x$ $g(x) = 2x - 2$		$2x = 2x - 2 \quad -2x$ $0 = -2$ keine Lösung.
	sich schneidend	$f(x) = x$ $g(x) = 2x - 2$		$x = 2x - 2 \quad -x$ $0 = x - 2 \quad +2$ $2 = x$ $\cup = \{2\}$
Parabel und Gerade	kein gemeinsamer Schnittpunkt	$f(x) = x^2 + 3$ $g(x) = 2x - 1$		$x^2 + 3 = 2x - 1 \quad -2x + 1$ $x^2 - 2x + 4 = 0$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-4}$ und $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}$ keine Lösung.
	ein gemeinsamer Schnittpunkt	$f(x) = x^2 + 3$ $g(x) = 2x + 2$		$x^2 + 3 = 2x + 2 \quad -2x + 2$ $x^2 - 2x + 1 = 0$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0 = 1$ und $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1 \pm 0 = 1 \quad \cup = \{1\}$
	zwei gemeinsame Schnittpunkte	$f(x) = x^2 + 3$ $g(x) = 2x + 3$		$x^2 + 3 = 2x + 3 \quad -2x - 3$ $x^2 - 2x = 0$ $x \cdot (x - 2) = 0$ $x_1 = 0$ und $x_2 = 2 = 0 \quad +2$ $x_2 = 2$ $\cup = \{0, 2\}$
Parabel und Parabel	kein gemeinsamer Schnittpunkt	$f(x) = -x^2$ $g(x) = -x^2 + 2$		$-x^2 = -x^2 + 2 \quad +x^2$ $0 = 2$ keine Lösung. $\cup = \emptyset$
	ein gemeinsamer Schnittpunkt	$f(x) = x^2$ $g(x) = -x^2$		$x^2 = -x^2 \quad +x^2$ $2x^2 = 0 \quad :2$ $x^2 = 0$ $\cup = \{0\}$
	zwei gemeinsame Schnittpunkte	$f(x) = x^2$ $g(x) = -x^2 + 2$		$x^2 = -x^2 + 2 \quad +x^2$ $2x^2 = 2 \quad :2$ $x^2 = 1$ $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ $\cup = \{-1, 1\}$

Beziehung und Veränderung

Ordnen C

Wie kann man besondere Werte bestimmen?

Schnellzugriff

O8 Ziele

- Die Schülerinnen und Schüler...
- können Bezüge zwischen besonderen Stellen eines Funktionsgraphen und einer realen Situation herstellen,
 - können diese Bezüge auch rechnerisch herstellen bzw. begründen,
 - können Begrifflichkeiten wie Nullstelle, Hochpunkt, Tiefpunkt den Darstellungen auf graphischer und auf algebraischer Ebene zuordnen und rechnerisch verarbeiten,
 - können zwischen (unabhängigem) x -Wert und abhängigen $f(x)$ -Wert unterscheiden und diese Abhängigkeit in Anwendungsaufgaben erkennen.

O8 Bezug

Nach O7. Weiter mit V29–V46

O8 Vorbereitung/Material

Wissenspeicher *Funktionen 17*
evtl. Kärtchen wie im Buch

O8 Umsetzungsvorschlag (30 min)

a)	Zuordnen der Karten.	PA
b)	Signalwörter suchen	PA
c)	Interpretation und kritische Validierung der Ergebnisse	PA/UG
d)	Ergebnisse sammeln und sichern	UG

Mögliche HA: V29, V30

Intensivzugriff

O8 Umsetzungshinweise

Achtung Druckfehler im Buch / im Materialblock:
Die Kärtchen Durchführung/Rechnung sind im Schülerbuch mit D1-D4 bezeichnet, im Wissenspeicher des Materialblocks mit R1–R4 (für Rechnung).

Das Problem P3 ist so zu lesen:

- 1000 € Einnahmen entsprechen im Graphen und in der Gleichung dem Skalenwert 1.
- Bei der Zeitachse wird der Wert $x = 0$ nur als Referenzjahr betrachtet. Die Werte $x = -1,5$ und $x = 2$ liegen entsprechend vor oder nach diesem Referenzjahr.

b) Die Fokussierung auf die bedeutsamen Wörter ist eine heuristische Hilfe, die auch immer kritisch durch die Lektüre der ganzen Frage und durch ein gründliches Vorstellen der Situation und Formulierungen der Aufgabe zu reflektieren ist (z.B. kann in Aufgaben das Erdniveau auch bei einem anderen Funktionswert sein, wenn das KOS anders gelegt wurde).

O8 Erwartungshorizont

Die Zuordnung des Problems P3 ist für Schüler schwierig. Einerseits muss $1 = 1000$ € gesetzt werden, andererseits muss die Darstellung über ein Referenzjahr thematisiert werden (siehe „Umsetzungshinweise“). Erleichtert kann die Lösung dadurch werden, dass besondere Stellen betrachtet werden: Wann war der Umsatz 0, wann war der Umsatz am höchsten? Wie hoch war der Umsatz zu diesem Zeitpunkt?

MB 6
30
Wissenspeicher – Ansatz finden
Funktionen 17

Wissenspeicher Probleme lösen im Rahmen quadratischer Zusammenhänge

Bei der Suche nach bestimmten Werten in quadratischen Zusammenhängen treten verschiedene Aufgabentypen auf. Diese sind entscheidend, um den Ansatz bei Problemstellungen zu finden.

P. roblem	Rechnung / Durchführung	E rgebnis und K ontrolle
Beispiel: Der Graph von f beschreibt im Bereich $0 \leq x < 4$ die Einnahmen eines Kiosks. x steht für die Zeit (in Jahren) und $f(x)$ für die Einnahmen (in Tausend €), zu welchem Zeitpunkt werden 1250€ eingenommen?	R1 $-x^2 + x + 2 = 125$ -125 $-x^2 + x - 123 = 0$ -1 $x^2 - x + 123 = 0$ p -q-Formel $a = -1$ und $c = 123$ Da $a < 0$, $0,5$ Jahre werden 1250€ eingenommen.	$x = -1,5$ ist außerhalb des Bereichs. Kontrolle: $f(-1,5) = -(-1,5)^2 + (-1,5) + 2 = 1,25$ $-0,25 - 1,5 + 2 = 0,25$ ✓
Beispiel: Der Graph von f beschreibt die Flugbahn eines Medizinballs. Wo trifft der Ball wieder auf die Erde?	R2 $-x^2 + x + 2 = 0$ -1 $x^2 - x - 2 = 0$ system. Problem $a = 1$ und $c = -2$	In einem Meter Entfernung trifft der Ball wieder auf die Erde. Die negative Lösung passt hier nicht. $-x^2 - 1 + 2 = 0$ ✓
Beispiel: Der Graph von f beschreibt eine Wurfpfad. Wo ist der geworfene Gegenstand am höchsten?	R3 $-x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2)$ $= -(x^2 - 0,5x + 0,25 - 0,25 - 2)$ $= -(x - 0,5)^2 - 2,25$ $= -(x - 0,5)^2 - 2,25$ Scheitelpunkt: $f(-0,5 2,25)$	An der Stelle $x = -0,5$ ist der Ball am höchsten. $f(-0,5) = -(-0,5)^2 - (-0,5) + 2 = 2$ $f(0) = 0^2 - 0 + 2 = 2$ $f(0,5) = -0,25 + 0,5 + 2 = 2,25$ ist der höchste Wert.
Beispiel: Der Graph von f beschreibt die Parabelform eines Brückenbogens. Die Straße über diese Brücke lässt sich beschreiben mit $g(x) = 0,5x + 1,5$. In welchen Punkten trifft die Straße den Brückenbogen?	R4 $-x^2 + x + 2 = 0,5x + 1,5$ $-0,5x - 1,5$ $-x^2 - 0,5x + 0,5 = 0$ -1 $x^2 + 0,5x - 0,5 = 0$ p -q-Formel $a = -1$ und $c = 0,5$	Kontrolle: $f(-1,78) = -(-1,78)^2 + (-1,78) + 2 = 0,5(-1,78) + 1,5$ $0,61 = 0,61$ $f(0,28) = -(0,28)^2 + 0,28 + 2 = 0,5(0,28) + 1,5$ $0,64 = 0,64$ In den Punkten $(-1,78 0,61)$ und $(0,28 0,64)$ trifft die Straße den Brückenbogen.

© 2017 Cengage Learning GmbH. Alle Rechte vorbehalten.

Vertiefen 1 Unbekannte Werte mit verschiedenen Darstellungen bestimmen

Hintergrund	Der Zugang zu graphischen Gleichungen wird auch im Vertiefen zunächst über das Erkunden quadratische Zusammenhänge angeregt. Dem entsprechend werden unbekannte Werte zunächst mit Tabellen und Graphen, dann aber auch schon rechnerisch bestimmt. Weiter vertieft wird das angeregte Verstehen insbesondere durch Reflexionen über die Bedeutung der Lösungsmengen.
--------------------	---

V1 Ziel: Vermutungen aufstellen und diese mithilfe von Tabellen und Graphen begründen, Erweiterung und Training der Erkenntnisse aus E1.

Dauer

20 min

Bezug

Nach **E1**

Hinweis

Im Aufgabenteil **a)** werden Vermutungen geäußert, die dann in Teil **b)** mithilfe einer Simulation genauer untersucht werden sollen. Das Anlegen einer Tabelle schafft Übersicht, ebenso die Darstellung im Koordinatensystem. Die Parameter der Simulation müssen für die verschiedenen Personen entsprechend angepasst werden. Wichtig ist eine klare Formulierung der Ergebnisse im Sachzusammenhang mit der entsprechenden Empfehlung entsprechend **d)**.

Der Einsatz der Simulationssoftware erfordert entsprechende PCs, eine PA ist sinnvoll.

Die Besprechung der Ergebnisse (Teil **d)**) erfolgt im Plenum. Da auch bei Aufgabe **V2** am PC, z.B. mit einer Tabellenkalkulation, gearbeitet werden kann, empfiehlt sich, beide Aufgaben hintereinander zu bearbeiten.

Lernwege

Für schwächere Schülerinnen oder Schüler könnten die Tabellen auch vorgegeben werden.

V2 Ziel: Tabellen und Graphen bei einem quadratischen Zusammenhang im Kontext erstellen

Dauer

15 min

Bezug

Nach **E1**, als **HA** geeignet.

Hinweis

Die Aufgabe eignet sich auch gut als Hausaufgabe, wenn **V1** erarbeitet wurde. Der Bremsweg ist hier mit einer Faustformel gegeben. In den Aufgabenteilen **a)** und **b)** soll die Darstellung in Tabelle und Graph geübt werden, um in Teil **c)** konkrete Fragen beantworten zu können.

Falls keine Möglichkeit besteht, einen PC/Laptop zu nutzen, kann die Aufgabe auch durch Einsetzen der Werte in die Faustformel und mit Taschenrechner gelöst werden, dann ist allerdings der Zeitbedarf höher.

Lernwege

Die Aufgabe kann in Partnerarbeit gelöst werden.

V3 Ziel: Ablesen von gesuchten Werten am Graphen

Dauer

15 min

Bezug

Nach **E1**, **E2**, als **HA** geeignet

Hinweis

In beiden Aufgabenteilen wird die Bestimmung von Werten anhand von Graphen wiederholt und geübt. Dabei wird das Vorwissen aus dem Kapitel Lineare Funktionen wieder aufgenommen und entsprechend bei einer quadratischen Funktion angewandt. Eine Probe erfolgt durch Einsetzen in die entsprechende Funktionsgleichung. Falls der gesuchte Wert nicht direkt abgelesen werden kann, muss geschätzt und dieses Ergebnis anschließend verifiziert werden. In Aufgabenteil **b)** muss ebenfalls in die Funktionsgleichungen eingesetzt und dann die Ungleichheit beider Seiten festgestellt werden.

In **b)** ist rechts eine höhere rechnerische Komplexität.

V4 Ziel: Graph, Tabelle und Term im Kontext zur Bestimmung von Werten einsetzen.

Dauer

15 min

Bezug

Nach **E3**, **O1**, als **HA** geeignet

Hinweis

Die Modellierung erfordert den Blick auf Graph, Tabelle und Term. Die Antworten können am Graphen abgelesen werden. In **c)** soll erkannt werden, dass beide Modelle für eine längerfristige Prognose ungeeignet sind.

Lernwege

Die Aufgabe ist für Partnerarbeit geeignet, Teil **c)** besonders für schnellere Schülerinnen und Schüler.

V5 Ziel: Erkennen des Zusammenhangs zwischen Funktionsterm und der Gleichung zur Bestimmung spezieller Werte

Dauer	15 min
Bezug	Nach O1 , als HA geeignet
Hinweis	Ausgehend von den Funktionstermen werden einfache Gleichungen erstellt und gelöst. Das bekannte Vorgehen bei linearen Funktionen wird auf quadratische Funktionen übertragen, rechnerische Lösungen sollen am Graphen und durch Einsetzen überprüft werden. Die unterschiedliche Anzahl von Schnittpunkten soll als Unterschied der beiden Funktionen erkannt werden.

V6 Ziel: Lösen von quadratischen Gleichungen durch Umformen bzw. Rückwärtsrechnen.

Dauer	30 min
Bezug	Nach E3 , E4 , O1 , O2 , als HA geeignet
Hinweis	Mithilfe von Pfeilbildern lässt sich der Prozess des Rückwärtsrechnens Schritt für Schritt durchführen. Das Zeichnen der Pfeilbilder bedeutet einen erhöhten Zeitaufwand. <i>Umsetzung:</i> Im Aufgabenteil b) empfiehlt sich eine Differenzierung je nach Leistungsniveau. Die Schülerinnen und Schüler können ihre Ergebnisse zu b) in Partnerarbeit vergleichen.
Lernwege	Der Aufgabenteil d) eignet sich ebenfalls zur Differenzierung je nach Lernniveau. Die Aufgabe kann ersetzt werden durch die Basisaufgabe im Materialblock. Vorgegebene Pfeilbilder erleichtern hier das Finden des Hin- und Rückweges.

V7 Ziel: Lösen einfacher linearer und quadratischer Gleichungen

Dauer	15 min
Bezug	Nach E3 , E4 , O2 , O3 , als HA geeignet
Hinweis	Neben dem Erkennen, ob eine Gleichung linear oder quadratisch ist, geht es hier um erweiterte Lösungsmethoden. Die Verwendung des Nullprodukts als neue Lösungsmethode sollte genutzt werden.
Lernwege	Die Aufgaben werden in zwei Schwierigkeitsstufen angeboten, die Schülerinnen und Schüler können entscheiden, welche Spalte sie bearbeiten wollen. Auch Teil b) bietet sich als Differenzierung für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler an.

V8 Ziel: Systematisch Nullstellen berechnen und visualisieren

Dauer	20 – 30 min
Bezug	Nach O3 , als HA geeignet
Hinweis	In Aufgabenteil a) sollen die verschiedenen Methoden aus O3 genutzt werden: Ausklammern, Binomische Formeln oder Nullprodukt anwenden, rückwärts rechnen. Eine Skizze hilft, die jeweilige Anzahl von Lösungen (Nullstellen) zu prüfen und damit auch den Aufgabenteil b) zu bearbeiten.
Lernwege	Eine Differenzierung ist möglich, indem anstelle dieser Aufgabe die entsprechende Aufgabe im Materialblock gelöst wird, die in a) ein Beispiel vorgibt und in c) schon passende Visualisierungen zur Verfügung stellt. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sollten motiviert werden, in Teil b) möglichst unterschiedliche individuelle Lösungen zu finden.

V9 Ziel: Verständnis des Begriffs Lösungsmenge trainieren

Dauer	10 min
Bezug	Nach O3
Hinweis	Die Vorstellung davon, was die Lösungsmenge rechnerisch und graphisch bedeutet wird gefestigt.
Lernwege	Die verschiedenen Aussagen sollten diskutiert werden, als Lernform eignet sich GA oder PA dafür, wenn vorher die Aussagen allein geprüft wurden. Im Plenum sollten die Ergebnisse zusammengetragen und diskutiert werden.

V10 Ziel: Äquivalenz von Gleichungen und Lösungsmengen graphisch deuten

<i>Dauer</i>	20 min
<i>Bezug</i>	Nach O3 , als HA geeignet
<i>Hinweis</i>	Es müssen nicht alle Gleichungen gelöst werden, Durch Rückwärtsrechnen erhaltene Ergebnisse können in anderen Gleichungen eingesetzt werden, um passende Tripel zu erhalten. Zur Lösung von b) lassen sich sowohl die Funktionsterme der Parabeln aus den Gleichungen in a) nutzen als auch die berechneten Lösungsmengen. Der Aspekt, dass verschiedene Graphen zu äquivalenten Gleichungen passen, ist in den Beispielen ausgespart.
<i>Lernwege</i>	Aufgabenteil c) kann als Differenzierung für schnellere Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden.

Vertiefen 2 Quadratische Gleichungen auf verschiedenen Rechenwegen lösen

<i>Hintergrund</i>	Die Rechenstrategien zur Lösung quadratischer Gleichungen sind je nach Form der Gleichung günstig oder umständlich. In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Rechenstrategien gezielt angeregt und eingeübt, indem entsprechende Aufgaben auf vorgegebenen Wegen gelöst werden.
--------------------	---

V11 Ziel: Nullprodukt als Lösungsstrategie gezielt einsetzen

<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach O3 , V7 , V8 , als HA geeignet
<i>Hinweise</i>	<i>Einordnung:</i> Diese Aufgabe legt den Fokus auf die Strategie „Nullprodukt nutzen“. In Aufgabenteil b) sollte der Bezug zu den Nullstellen des zugehörigen Funktionsgraphen hergestellt werden.
<i>Lernwege</i>	In der Aufgabe wird die Möglichkeit zur Differenzierung gegeben. Wenn die rechte Seite nicht Null wird, kann das Verfahren nicht angewendet werden. Dieser Fall muss thematisiert werden.

V12 Ziel: quadratischen Gleichungen in ein Nullprodukt umformen (Satz von Vieta)

<i>Dauer</i>	20 min
<i>Bezug</i>	Nach O3
<i>Hinweis</i>	Training mit schönen Päckchen Die Schülerinnen und Schüler sollen herausfinden, dass die negative Summe der beiden Lösungen $-p$ und das Produkt der Lösungen die Zahl q der allgemeinen Form ergibt, also $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$. Damit kann in vielen Fällen das Nullprodukt als Lösungsmethode genutzt werden.
<i>Lernwege</i>	Die Aufgabenteile b) und c) haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad und eignen sich besonders für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler.

V13 Ziel: quadratische Ergänzungen bilden

<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach O3 , V12 , als HA geeignet, paralleldifferenziert
<i>Hinweis</i>	Training mit Reflexion zu Lösungsmengen und geometrischer Deutung.

V14 Ziel: Üben und Anwenden der p-q-Formel

<i>Dauer</i>	20 min
<i>Bezug</i>	Nach O4 , V13 , als HA geeignet
<i>Hinweis</i>	Training mit schönen Päckchen, das anregt die Auswirkungen von Veränderungen von p und q zu untersuchen. Der Aufgabenteil b) sollte im Plenum besprochen werden, auch um das Wissen zur Anzahl der Lösungen zu festigen. In Aufgabenteil a) sollen alle Aufgaben in (A) und (B) von allen Schülerinnen und Schülern gelöst werden, damit Teil b) sinnvoll bearbeitet werden kann.
<i>Lernwege</i>	Falls die Aufgabe in der Klasse bearbeitet wird, bietet sich für Teil b) PA an. Schnellere oder leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können in Teil c) individuelle Gleichungen suchen.

V15 Ziel: Fehler zur p-q-Formel entdecken und reflektieren

Dauer	15 min
Bezug	Nach O4, O5, V14
Hinweis	Zunächst wird die gegebene Aufgabe selbst gerechnet, danach sollen die Fehler der vier Kinder gefunden werden, um genau diese Fehlern selbst zu vermeiden.
Lernwege	Die Aufgabenteile b) bis e) können als Einzelarbeit oder Partnerarbeit bearbeitet werden, eine gemeinsame Reflexion im Plenum sollte zudem stattfinden.

V16 Ziel: p-q-Formel variieren

Dauer	20 min
Bezug	Nach O4, O5, V13 , als HA geeignet bis auf d)
Hinweis	Mit binomischen Formeln bzw. quadratischer Ergänzung und Rückwärtsrechnen können alle Gleichungen gelöst werden. Durch die Variation der Zahlen o sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, wann die Gleichungen keine Lösungen mehr haben. In c) und d) werden diese Erkenntnisse aktiv und individuell umgesetzt, beide Aufgabenteile eignen sich damit auch zur Differenzierung.

Vertiefen 3 Quadratische Gleichungen flexibel lösen

Hintergrund	Im Unterschied zu Etappe 2 soll hier bewusst und meist eigenständig ein günstiges Verfahren gewählt werden. Einzelne Strategien (z.B. Rückwärtsrechnen in V22) werden jedoch weiterhin gezielt angeregt, um auch immer wieder wichtige vorstellungsmäßige Wege anzuregen. Die Flexibilisierung sollte durch regelmäßiges Aktivieren der Frage nach dem günstigsten Weg immer wieder angeregt werden, z. B. auch als <i>warm up</i> zu Beginn der nächsten Stunden vgl. Hinweise zu V17 .
--------------------	---

V17 Ziel: Gleichung mit gezielter Strategiewahl lösen und Strategiewahl reflektieren

Dauer	15 min
Bezug	Nach O5, O6, a) als HA geeignet
Hinweise	Die Schülerinnen und Schüler haben fünf unterschiedliche Lösungsmethoden zur Verfügung, die in den meisten Fällen schnell die Lösungen liefert. Es geht darum, bewusst auf dem einfachsten Weg zu lösen. Teil a) sollte in Einzelarbeit oder als Hausaufgabe bearbeitet werden, Teil b) eignet sich zur Partner- bzw. Gruppenarbeit, aber auch die Reflexion im Plenum ist wichtig, damit nicht nur ein Weg als einfach angesehen wird, sondern aufgabenbezogen unterschieden wird. Die Aufgabe, passende Wege zu vorgegebenen, verschiedenen vor allem einfachen Gleichungen anzugeben, sollte in den folgenden Stunden immer wieder als kurzes <i>warm-up</i> zu Beginn der Stunde durchgeführt werden, um die Flexibilisierung zu unterstützen.

V18 Ziel: Anzahl der Lösungen / Nullstellen und Aussehen der Graphen vernetzen

Dauer	20 min
Bezug	Nach O5, O6 , als HA geeignet
Hinweise	Die Darstellung in Tabellenform schafft einen Überblick über den Zusammenhang zwischen Gleichung, Lösung, Funktionsgleichung (Graph) und Nullstellen. Der Einsatz eines Funktionszeichenprogramms ermöglicht es, sich diesen Zusammenhang visuell und damit besonders einprägend klar zu machen. Falls das im Unterricht nicht möglich ist, könnte das Zeichnen der Graphen als Hausaufgabe erfolgen und anschließend präsentiert werden. Auf die Verbalisierung der Zusammenhänge in d) sollte Wert gelegt werden.
Lernwege	

V19 Ziel: Zusammenhang zwischen der Anzahl der Lösungen, den Zahlen in der pq-Formel und der zugehörigen Parabel erkennen.

Dauer 15 min

Bezug Nach **O5, a)** als **HA** geeignet

Hinweise Beim Lösen der gegebenen Gleichungen mit der p-q-Formel wird der Term unter der Wurzel betrachtet und erkannt, dass man aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen kann und dass die Wurzel auch Null werden kann. Die 3 Fälle sollen in **b)** formuliert werden. Diese Erkenntnis wird in Aufgabenteil **c)** durch eigenes Ausprobieren vertieft. In Teil **d)** kommt der grafische Aspekt dazu: Die entsprechenden Parabeln haben einen, keinen oder zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Eine alternative, durch die Vorgabe der Graphen stärker vorstrukturierte und lokal entlastete Basisaufgabe findet man im Materialblock.

V20 Ziel: Schwierigkeiten beim Lösen von quadratischen Gleichungen reflektieren.

Dauer 25 min

Bezug Nach **O6, a)** als **HA** geeignet

Hinweise Einige Gleichungen müssen zunächst umgeformt werden, um bekannte Lösungsmethoden anwenden zu können. Ziel ist hier immer, die Gleichung auf Normalform zu bringen.

Lernwege Als Vorbereitung könnte Aufgabenteil **a)** als Hausaufgabe gestellt werden, ansonsten könnten die Gleichungen in Einzelarbeit bearbeitet werden, nach Sicherung der Ergebnisse bietet sich für **b)** und **d)** Partnerarbeit an. Der Teil **c)** bietet besonders Anreize für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler. Weiterer vertiefender Impuls: „Beschreibe allgemein alle Gleichungen, die die Lösungen aus **a)** (1) haben.“

V21 Ziel: Nullprodukt durch Umkehrung flexibilisieren.

Dauer 25 min

Bezug Nach **O5, O6, V12**

Hinweise Die Anwendung des Nullprodukts wird wieder aufgegriffen und die Vorgehensweise in Teil **a)** am Beispiel erläutert. Weiter Lösungen können z.B. durch das Anfügen von Faktoren entstehen.

Lernwege Nach der Einstiegsaufgabe in Teil **a)** sind individuelle Lösungen möglich, für die auch genügend Zeit eingeräumt werden sollte. Eine Differenzierung ergibt sich aus der Aufgabenstellung. Die Bearbeitung sollte in Partner- oder Gruppenarbeit erfolgen. Als Basisaufgabe ist der Auftrag in **V30** integriert (nicht **V31**).

V22 Ziel: Lösen einfacher Aufgaben flexibilisieren und verinnerlichen

Dauer 20 min

Bezug Nach **O5, V18, V19, V21, a)** als **HA** geeignet

Hinweis Verlangt sind einfache rechnerische Lösungen von quadratischen Gleichungen, grafische Vorstellungen vom Kurvenverlauf der entsprechenden Parabel und die Anwendung des Nullprodukts.

Lernwege Die Bearbeitung von **a)** bis **d)** sollte in Einzelarbeit erfolgen, die Ergebnisse in Partnerarbeit oder im Plenum gesichert werden. Teil **e)** bietet Möglichkeiten zur Differenzierung.

	V23	Ziel: erkunden einer geometrischen Interpretation quadratischer Gleichungen.
<i>Dauer</i>	15 min	
<i>Bezug</i>	Nach O4	
<i>Hinweis</i>	In dieser Aufgabe geht es um die Erfahrung, dass quadratische Gleichungen auch geometrisch durch eine geeignete Konstruktion gelöst werden können. Der Nachweis, dass es sich bei den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse tatsächlich um die Lösungen der Gleichung handelt, erfordert Oberstufenkenntnisse und könnte eine Aufgabe für den Lehrer bzw. die Lehrerin sein. Daher erfolgt hier nur eine exemplarische Überprüfung und eine Anwendung auf mehrere Beispiele, die auch als Hausaufgabe durchgeführt werden können. Die Besprechung von Aufgabenteil c) sollte im Plenum erfolgen.	
<i>Lernwege</i>	Eventuelle Nachfragen zum Text sollten im Plenum beantwortet werden, die Konstruktion in Teil a) sollte jeder Schüler bzw. jede Schülerin im Heft durchführen. Für Teil b) ist der Einsatz einer Geometriesoftware sowie Partnerarbeit sinnvoll, um viele Beispiele zu erzeugen. Diese sollten im Heft skizziert werden, um die Frage in c) beantworten zu können.	

Vertiefen 4 Schnittpunkte finden

<i>Hintergrund</i>	Das Berechnen von Schnittpunkten zwei Parabeln bzw. einer Parabel und einer Gerade soll hier als mehrschrittiges, komplexes Verfahren trainiert, aber immer wieder auch mit der graphischen Darstellung vernetzt und verstehensorientiert variiert werden.
--------------------	--

	V24	Ziel: Gemeinsamen Punkte von Parabeln und Geraden bestimmen und graphisch prüfen
<i>Dauer</i>	30 min	
<i>Bezug</i>	Nach E5, O7 , als HA geeignet	
<i>Hinweise</i>	Um gemeinsame Punkte zu finden, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt und wenn möglich ein x-Wert berechnet, der dann in beide Gleichungen eingesetzt werden kann und zu dem der gemeinsame y-Wert bestimmt werden kann. Mit der grafischen Darstellung lässt sich die Rechnung überprüfen, die Zusammenhänge zwischen Rechnung und Graph werden gefestigt. Die Termstruktur und der Einfluss des zu variierenden Parameters auf die Graphen werden deutlich.	
<i>Lernwege</i>	Eine Differenzierung ist hier durch unterschiedliche Aufgabenstellungen gegeben. Ebenso kann Teil c) für schneller arbeitenden Schülerinnen und Schüler stärker betont werden. Aufgabenteil a) kann in Einzelarbeit, Teil b) in Partnerarbeit bearbeitet werden.	

	V25	Ziel: Schnittpunkte rechnerisch bestimmen und verstehensorientiert variieren
<i>Dauer</i>	30 min	
<i>Bezug</i>	Nach E5, O7, V24, a) als HA geeignet	
<i>Hinweise</i>	Nach der Berechnung der Schnittpunkte und nach Durchführung einer Probe variieren die Schülerinnen und Schüler die Funktionsterme eines Funktionenpaares aus a) . Sie erkunden so die Bedingungen, die für Schnittpunkte der Graphen von Bedeutung sind.	
<i>Lernwege</i>	Auch hier ist eine Differenzierung durch die Aufgabenstellung im 1. Teil vorgegeben. Dieser Teil kann auch als Hausaufgabe gestellt werden. Für die Arbeit mit der Funktionssoftware bietet sich Partnerarbeit an, um die Qualität der Auseinandersetzung zu steigern.	

	V26	Ziel: Schnittpunkte im Kontext ermitteln.
<i>Dauer</i>	15 min	
<i>Bezug</i>	Nach E6, E7, O7	
<i>Hinweis</i>	Die Gleichung zur Bestimmung der gesuchten Punkte kann aufgrund der rechnerischen Anforderungen graphisch gelöst werden. Auch die Variationen in Teil b) erfolgen mit Funktionssoftware.	
<i>Lernwege</i>	Für die Arbeit mit der Funktionssoftware bietet sich Partnerarbeit an.	

V27 Ziel: Schnittpunkte von Graphen berechnen, sowie eigene Graphen erzeugen.

Dauer	30 min
Bezug	Nach E6, O7, V24, V25, a) als HA geeignet
Hinweis	Die Schülerinnen und Schüler entscheiden, welche Gleichungen für die jeweiligen Schnittpunkte aufgestellt werden müssen und lösen diese. Dazu müssen die gegebenen Funktionsgleichungen zunächst den Graphen zugeordnet werden. Hier sind gute Strukturierung und genaues Arbeiten erforderlich. Aufgabenteil b) und c) erfordern den Einsatz von Funktionssoftware und bieten ein breites Feld für eigene Experimente. Durch dieses Experimentieren festigt sich der sichere Umgang mit Parabeln und Funktionstermen.
Lernwege	Im Materialblock befindet sich die Aufgabe mit nur drei Funktionen. Damit wird der Aufgabenteil a) übersichtlicher und einfacher. Der Aufgabenteil c) bietet für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von individuellen Möglichkeiten (Rückwärts arbeiten, Spezialfälle betrachten, Vorwärtsarbeiten).

V28 Ziel: Zu gegebenen Schnittpunkten passende Funktionen finden

Dauer	20 min
Bezug	Nach E6, O7, V21.
Hinweise	Als Strategie bietet sich für schwächere Lernende immer auch das Arbeiten mit Parabelschablone an, um sich der Umkehrung über die Variation der Graphen anzunähern. Alternativ bietet sich ein Funktionenplotter an, mit dem die verschiedenen Ideen und Lösungsansätze sofort überprüft und entsprechend angepasst werden können. Die Aufgabenstellung bietet zwei unterschiedliche Schwierigkeitsgrade an. In der einfacheren Version liegen die Schnittpunkte auf einer Parallelen zur x-Achse. Eine Lösung kann durch Verschieben von zwei Parabeln erfolgen, die gemeinsame Nullstellen haben. Irritation kann in a) der Begriff gemeinsamer Punkt im Unterschied zum speziellen gemeinsamen Punkt, dem Schnittpunkt hervorrufen. Mit c) wird klarer, dass der gemeinsame Punkt auch ein Berührungspunkt sein kann. Eine weitere Differenzierung ergibt sich durch die Wahl der sich schneidenden Funktionstypen. Die Aufgabe kann in Partnerarbeit oder auch Gruppenarbeit mit einer anschließenden Besprechung im Plenum erfolgen.

Vertiefen 5 Besondere Werte finden

Hintergrund	Nachdem die mathematischen Voraussetzungen geschaffen sind, werden diese nun in unterschiedlichen Kontexten angewendet, um anstehende Fragen beantworten zu können. Dabei müssen bestimmte Eingabewerte, Funktionswerte und Schnittpunkte im Sachzusammenhang ermittelt werden.
--------------------	---

V29 Ziel: Zentrale Begriffe und Lösungswege anwenden.

Dauer	25 min
Bezug	Nach O7, als HA geeignet, wenn Begriffe klar
Hinweise	Als Einstieg in die Thematik werden die besonderen Punkte und Werte noch einmal genannt und dann innermathematisch angewendet. In der Besprechung könnten die Namen der besonderen Punkte des Graphen, die markierten Punkte und die Berechnungsansätze in einem Schaubild als Ergänzung zu O7 festgehalten werden.
Lernwege	

V30 Ziel: Extremstellen einer Parabel finden

Dauer	15 min
Bezug	Nach E9, V29, als HA geeignet
Hinweise	In a) sind verschiedene Arten des Ausschlusses und Prüfens möglich (Einsetzen von einzelnen Punkten, Ablesen des Scheitelpunktes). Durch die Untersuchung von Nullstellen und Extrempunkten kann entdeckt werden, dass bei Parabeln die Extremwerte immer mittig zwischen zwei Nullstellen liegen.
Lernwege	Diese Aufgabe gibt es als Basisaufgabe in einfacherer und stärker geführter Form im Materialblock. (Achtung in der Basisversion fehlt ein Vorzeichen $f(x) = -x^2 + 4x$.)

V31	Ziel: Besondere Werte in bekanntem Kontext finden
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach E6 , V29 , V30 , als HA geeignet
<i>Hinweis</i>	Nullstellen, Extremwert und bestimmte Funktionswerte werden im bekannten Kontext „Brücke“ ermittelt. Dabei muss der Text zunächst in eine mathematische Fragestellung übersetzt werden. Die Überprüfung am Graphen in Aufgabenteil b) kann mit einem Funktionsplotter oder gemeinsam an einem vorgegebenen Graphen stattfinden, sonst bietet b) die Herausforderung, dass ein geeignetes Koordinatensystem gewählt werden muss.
V32	Ziel: Funktionsgleichungen im Kontext „Radfahren“ aufstellen
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach E7
<i>Hinweis</i>	Die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass die Zeit die unabhängige Variable x ist und die Entfernung dem Wert $f(x)$ auf der y -Achse entspricht. Eine Skizze kann hilfreich, um die Funktionsterme zu finden.
V33	Ziel: Bestimmte Werte finden im Kontext „Ballsparten“
<i>Dauer</i>	Je nach Organisationsform 25 – 40 min
<i>Bezug</i>	Nach O8 , a) , b) als HA geeignet
<i>Hinweise</i>	Bei den drei voneinander unabhängigen Aufgaben werden Bezüge zu früheren Fragestellungen aufgenommen und jeweils nach Nullstelle, Extremwert und einem bestimmten Funktionswert gefragt. Im Aufgabenteil c) wird ein zusätzlicher Parameter variiert. Der Teil ist besonders für schnellere und leistungsstärkere Schülerinnen geeignet.
V34	Ziel: Besondere Werte im Kontext „Flughahn“ bestimmen
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach O8 , V31 , V33 , als HA geeignet.
<i>Hinweis</i>	Die Wahl des passenden besonderen Wertes ist in a) einfach, in b) , c) komplexer, insofern die Summe der Beträge der Nullstellen gebildet werden muss, bzw. insofern die Übersetzung der Information „55 Meter vom Absprung entfernt“ in $f(x_0+55)$ in der Anschauung der geometrischen Größen für Lernende nicht unbedingt intuitiv klar ist...
V35	Ziel: Besondere Punkte finden in neuem Kontext
<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach O8 , V31 , V33 , V34 , als HA geeignet.
<i>Hinweis</i>	Wie in den Aufgaben V31 und V33 geht es darum, die Fragen des Kontextes in mathematische Fragen umzuwandeln. Gesucht sind Nullstelle und Extremwert.
<i>Lernwege</i>	Nach Bearbeitung der vorherigen Aufgaben, eignet sich diese Aufgabe als Training bzw. als Hausaufgabe.
V36	Ziel: Variation bekannter Fragestellungen
<i>Dauer</i>	5 min
<i>Bezug</i>	Nach O8 , V34 , V35 , als HA geeignet.
<i>Hinweise</i>	Auch in dieser Aufgabe soll das Maximum bestimmt werden. Der Scheitelpunkt der Parabel kann direkt am Term abgelesen werden

V37 Ziel: Zahlenrätsel mit quadratischen Gleichungen lösen

<i>Dauer</i>	25 min
<i>Bezug</i>	Nach O8
<i>Hinweis</i>	Bei diesen Rätselaufgaben muss der Text genau gelesen werden, um die Aufgabenstellung in eine Gleichung zu übertragen. Dabei ist ein systematisches Vorgehen erforderlich: unbekannte Zahl benennen, dann die einzelnen Angaben Schritt für Schritt aufschreiben, dabei auf Klammern achten.
<i>Lernwege</i>	Eine Differenzierung könnte erfolgen, indem leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler nur die Aufgabenteile a) und b) bearbeiten, leistungsstärkere die Aufgabenteile c) und d) . Oder c) und d) werden im Unterricht bearbeitet, a) und b) als Hausaufgabe gestellt.

V38 Ziel: Den größten Gewinn ermitteln

<i>Dauer</i>	20 min
<i>Bezug</i>	Nach O8
<i>Hinweis</i>	Da das Aufstellen einer Gleichung auf den ersten Blick schwierig ist, soll sich die Schülerinnen und Schüler mit einer Tabelle eine Übersicht verschaffen. Anhand konkreter Zahlen und dentsprechender Rechenvorschrift wird in Teil b) zur Gleichung hingeführt. Um die maximalen Einnahmen zu finden kann diese Gleichung $E(x)$ entweder auf die Scheitelpunktsform gebracht werden oder man bestimmt die Mitte zwischen den beiden Nullstellen und berechnet den zugehörigen Wert von $E(x)$.
<i>Lernwege</i>	Für die Aufgabe empfiehlt sich eine Partnerarbeit.

V39 Ziel: Flächeninhalte allgemein beschreiben und unbekannte Werte bestimmen

<i>Dauer</i>	15 min
<i>Bezug</i>	Nach O8
<i>Hinweis</i>	Mit der verlangten (und beschrifteten) Skizze verschaffen sich die Schülerinnen und Schüler einen Überblick über die geometrischen Gegebenheiten und sind anschließend in der Lage, die gesuchte Gleichung für die allgemeine Fläche aufzustellen und die Breite für 16m^2 zu bestimmen.
<i>Lernwege</i>	Die Aufgabe ist für Partnerarbeit geeignet.

V40 Ziel: Sich einen Überblick über typische Aufgabenformate verschaffen

<i>Dauer</i>	40 min
<i>Bezug</i>	Nach O8
<i>Hinweis</i>	Die 6 gegebenen Aufgaben beziehen sich im Wesentlichen auf bekannte Sachzusammenhänge. Sie dienen dazu, Fragen und Lösungsmethoden zu reflektieren. Wie in der vereinfachten Basisaufgabe im Materialblock vorgegeben, ist eine Tabelle gut geeignet, um sich einen Überblick zu verschaffen.
<i>Lernwege</i>	In der Basisaufgabe im Materialblock fehlen die beiden letzten, schwierigeren Aufgaben. Diese, und besonders Aufgabe F, können für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden. Die Aufgabe ist gut für Gruppenarbeit geeignet, wobei für schwächere Gruppen die Tabelle vorgegeben werden sollte. Die Lösung der Aufgaben könnte teilweise als Hausaufgabe erfolgen. Die Überprüfung mit Hilfe der Funktionensoftware kann schon im Rahmen der HA angeregt werden.

V41 Ziel: Eine gegebene Formel untersuchen und Zusammenhänge erkennen

<i>Dauer</i>	30 min
<i>Bezug</i>	Nach E2, E3
<i>Hinweis</i>	In den Aufgabenteilen a) und b) werden zunächst gegebene Werte eingesetzt und das Gewicht (Jungen) bzw. die Größe (Mädchen) aus der Formel errechnet. Bei a) entsteht eine einfache lineare Gleichung, bei b) muss nach der Umformung die Wurzel gezogen werden. Für Jungen und Mädchen werden jeweils Tabelle und Graph erstellt. Im ersten Fall BMI(Gewicht) ist die Gerade bzw. der lineare Zusammenhang gut zu erkennen. Der Graph der Funktion BMI(Länge) sieht nur auf den ersten Blick wie eine Gerade aus. Da der quadratische Term in Nenner steht, kann der Graph auch keine Parabel sein. Diese Argumentation wird auch bei der Begründung in Teil f) benutzt.

Lernwege

Die Aufgabe eignet sich gut für Partner- oder Gruppenarbeit. **a)** und **d)** sollten auch weniger leistungsstarke Schülerinnen bearbeiten können. Teil **f)** animiert leistungsstärkere und schnellere Lerner zum Weiterdenken.

V42**Ziel: Quadratische Zusammenhänge in geometrischen Anordnungen erkennen****Dauer**

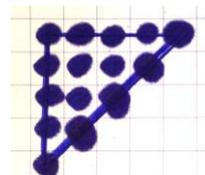
20 min

Bezug

Keine konkrete Aufgabe

Hinweis

Der Aufgabenteil **b)** wird vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten, die folgende Zeichnung hilft bei der Überlegung: $n^2/2$ sind zu wenige Punkte. Es fehlt die halbe Diagonale. Also $n^2/2 + n/2$. Die quadratische Gleichung in Aufgabenteil **d)** kann mit p-q-Formel gelöst werden.

**Lernwege**

Die Aufgabe kann in Einzelarbeit gelöst werden. Für **b)** benötigen sicher einige Schülerinnen und Schüler Hilfestellungen. Der Hinweis auf das Bild und weitere Beispielbilder auch in der Form der Rechteckbilder im Buch zu zeichnen kann helfen. Teil **d)** wird dann der Bezug zum Gleichungslosen wiederhergestellt.

V43**Ziel: Fallgesetze selbstständig erkunden****Dauer**

20 min

BezugNach **O8, V31–V39****Hinweis**

Im Gegensatz zu den bisherigen Sachaufgaben **V31–V39** muss zunächst die Funktionsgleichung ermittelt werden. Eine Skizze ist hilfreich und führt zu dem Ansatz $f(x) = -a \cdot x^2 + b$. Die Parameter a und b werden mit einem Gleichungssystem gelöst, das durch Einsetzen der gegebenen Punktkoordinaten entsteht. Wird die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung verwendet (siehe Lösungsheft), müssen die Punkte an der y-Achse gespiegelt werden. Die Fragestellungen in **b)** sind bekannt. Der Versuch in Teil **c)** muss vorbereitet werden (Material, Überlegungen zur Organisationsform ...)

Lernwege

Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können bei gegebener Gleichung Teil **b)** selbstständig bearbeiten. Teil **c)** ist für Partner- oder Gruppenarbeit geeignet.

V44**Ziel: Veränderungen anhand eines Terms abschätzen****Dauer**

15 min

BezugNach **E2, E3****Hinweis**

In dieser Aufgabe muss nichts berechnet werden. Aufgabenteil **a)** basiert auf eigenen Vorerfahrungen zu Fliehkräften, in Teil **b)** und **c)** wird der Einfluss des jeweiligen Parameters auf den Funktionsterm betrachtet (...steht im Nenner, ... ist quadratisch, ...) Als Umsetzung empfiehlt sich ICH DU WIR.

Vertiefen 6**Gleichungen mit höheren Potenzen lösen****Hintergrund**

Die Etappe soll die Nutzung der Strategie „Nullprodukt nutzen“ auch für Gleichungen mit Potenzen mit Exponenten größer 2 verfügbar machen.

V45**Ziel: Gleichungen mit höheren Potenzen mit bekannten Methoden lösen****Dauer**

25 min

BezugNach **O3, O5****Hinweise**

Auch Gleichungen mit höheren Potenzen lassen sich problemlos lösen, wenn sie auf eine bestimmte Form gebracht werden können. Wichtig: Das Nullprodukt lässt sich nur nutzen, wenn der Wert des Produkts eben 0 ist (siehe **c)**). Für **d)** und **e)** sind individuelle Lösungen möglich und ermöglichen kompliziert aussehende Gleichungen

Lernwege

Die durch die höheren Kompetenzen entstehende Komplexität bereitet Lernenden Probleme. Das bewusste Übersetzen in die „Oder“-Schreibweise kann eine wertvolle strukturelle Stütze bieten, wenn reflektiert wird, dass /warum hier mehrere „Oder“ im Lösungsweg stehen.

V46 Ziel: Gleichungen mit höheren Potenzen anwenden**Dauer**

20 min

BezugNach **V45**, Aufgaben des vorherigen Kapitels**Hinweise**

Der Sachkontext bezieht sich auf Aufgaben aus dem Kapitel „im Filmstudio – Vergrößern und Verkleinern in mehreren Dimensionen“, kann aber auch ohne dieses Vorwissen bearbeitet werden. Zu gegebenen Gleichungen sollen bestimmte Werte berechnet werden, in Teil **a)** und **b)** ist jeweils nach der unabhängigen Variablen gefragt. In Teil **c)** muss der Einfluss der Potenz auf die Veränderung beachtet werden.

Kompetenzen

Übergreifende mathematische Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- nutzen zum Lösen von Problemen reflektiert verschiedene Darstellungen.
- Nutzen die Vernetzung zwischen verschiedenen Darstellungen und Hin- und Rückwegen zum gezielten Verständnis mathematischer Objekte und zur Kontrolle.
- Notieren formale Lösungswege normkonform.

Schwerpunkte bei den arbeitsmethodischen Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler...

- Wiederholen zurückliegende Lerninhalte (eigenständig).
- Gestalten und reflektieren den Übungsprozess im Umgang mit den vielen Lösungswegen des Kapitels bewusst.

Hinweise zur systematischen Wortschatzarbeit

Schreiben und Sprechen: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende (dauerhaft) aktiv nutzen können (zum Teil aus alten Kapiteln):

- ... in Abhängigkeit von ...
- die quadratische Gleichung
- wenn ich für x den Wert ... einsetze, erhalte ich ...
- der / die x -Wert/e zum Funktionswert ... ist / sind ...
- ... besitzt eine / zwei / mehrere Nullstellen
- wenn der Graph die x -Achse kreuzt
- das Produkt wird nur null, wenn ...
- ... genau dann, wenn ...
- beide Terme beschreiben dasselbe
- ich setze die beiden Terme gleich

Lesen und Zuhören: Die folgenden themenspezifischen Wörter und Satzbausteine sollten Lernende in ihrer Bedeutung erfassen, aber nicht unbedingt selbst nutzen können:

- der Reaktions-, Brems-, Anhalteweg
- die Lösungsmenge besteht aus ...
- die Parabel in Scheitelpunktform / der allgemeinen Form hat ...
- ... sind äquivalent
- mit der quadratischen Ergänzung / der binomischen Formel umformen

Überprüfung

Das Überprüfen der zentralen Kompetenzen des Kapitels ist für die Zentralen Abschlussprüfungen nicht in allen Bundesländern wichtig, wobei sich die Prüfungen sehr unterscheiden. Daher sollte der Grad der Komplexität der Aufgaben denen der jeweiligen Prüfungen angepasst werden.

Als **zusätzlichen Leistungsnachweis**

bieten sich hier bewertete für eine Differenzierung nach oben bietet sich hier die selbständige Untersuchung anderer Spiele an.



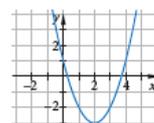
Checkliste Abschätzungen im Verkehr –
Werte in quadratischen Zusammenhängen bestimmen

Ich kann ...
Ich kenne ...

Hier kann ich
üben ...

K1

Ich kann eine quadratische Gleichung lösen durch Ablesen am Graphen.
Finde alle Lösungen der Gleichung $(x - 2)^2 - 3 = 1$ anhand des Graphen und überprüfe deine Lösungen durch Einsetzen in die Gleichung.



S. 272 Nr. 1, 2
S. 273 Nr. 3
S. 274 Nr. 5

K2

Ich kann eine Gleichung, bei der der quadratische Term in Scheitelpunktform steht, durch Rückwärtsrechnen lösen.
Finde alle Lösungen der quadratischen Gleichung $(x + 5)^2 - 36 = 0$ durch Rückwärtsrechnen.

S. 272 Nr. 2 c)
S. 273 Nr. 4
S. 274 Nr. 5, 6

K3

Ich kann eine quadratische Gleichung rechnerisch lösen und dazu einen passenden Lösungsweg auswählen.
Löse die folgenden Gleichungen rechnerisch. Wähle bewusst einen passenden Weg aus und überprüfe dein Ergebnis durch Einsetzen in die Gleichung.
a) $4x^2 = 36$ b) $2(x + 1)(x - 3) = 0$ c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ d) $x^2 - 3x = 0$

S. 276 Nr. 11, 12
S. 278 Nr. 15, 16
S. 279 Nr. 17
S. 280 Nr. 20
S. 281 Nr. 22

K4

Ich kann am Graphen erklären, wann eine quadratische Gleichung zwei, eine oder keine Lösungen hat und ich kann dazu Beispiele angeben.
Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(x) = x^2 - 3x = 10$? Erkläre am Graphen und verändere die Gleichung so, dass sie nur eine Lösung hat und so, dass sie keine Lösung hat.

S. 279 Nr. 18
S. 280 Nr. 19, 21

K5

Ich kann die Nullstellen einer quadratischen Funktion bestimmen.
Bestimme die Nullstellen zur Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Verändere die Funktionsgleichung so, dass die Funktion nur eine Nullstelle hat und so, dass sie keine Nullstelle hat.

S. 274 Nr. 5
S. 275 Nr. 8
S. 276 Nr. 11, 12

K6

Ich kann eine quadratische Gleichung aus den Angaben einer Problemstellung aufstellen.
Die Summe einer natürlichen Zahl und ihrer Quadratzahl ist 56.
Stelle eine Gleichung dazu auf und löse mit einem passenden Weg.

S. 283 Nr. 28
S. 285 Nr. 32
S. 287 Nr. 37–39
S. 288 Nr. 40
S. 289 Nr. 41, 42
S. 290 Nr. 43, 44

K7

Ich kann besondere Punkte einer Parabel (Schnittpunkte mit den Achsen, Scheitelpunkt) bestimmen und ihre Bedeutung im Kontext erklären.
Die Flugbahn eines Balls wird beschrieben mit $f(x) = -x^2 + 0,5x + 1,8$.
Wann trifft der Ball auf die Erde und wann hat der Ball die größte Höhe?

S. 284 Nr. 31
S. 285 Nr. 32, 33
S. 286 Nr. 34–36
S. 288 Nr. 40
S. 289 Nr. 41, 42

K8

Ich kann die Schnittpunkte zweier Parabeln oder einer Parabel mit einer Geraden bestimmen.
Wo liegen die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen?
a) $f(x) = x^2 - 2x - 4$ und $g(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + 1$

S. 282 Nr. 24, 25
S. 283 Nr. 26–28

► **Hinweis:** Im Materialblock auf Seite 141 findest du diese Checkliste für deine Selbsteinschätzung. Zusätzliche Übungsaufgaben findest du im Internet unter 292-1. (www.cornelsen.de/mathewerkstatt, Webcode: MWS040042-292-1)

Kompetenzen aus vorangegangenem Kapitel
Krummlinige Zusammenhänge beschreiben:

- K4** Ich kann die Form und Lage von Parabeln, sowie besondere Punkte mit Worten beschreiben.
- K5** Ich kann durch Termumformung zwischen der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform einer Parabel wechseln.

Basiskompetenzen, die in der Übe-Kartei für das spätere Vertiefen aufgegriffen werden:

- K1** Ich kann quadratische Gleichungen lösen durch Ablesen am Graphen und in der Tabelle.
- K3** Ich kann eine quadratische Gleichung rechnerisch lösen und dabei einen passenden Weg auswählen.
- K3** Ich kann zu einem Sachkontext eine quadratische Funktion bestimmen, lösen und die Ergebnisse interpretieren.
- K7** Ich kann besondere Punkte einer Parabel bestimmen (Schnittpunkte mit den Achsen, Scheitelpunkt).
- K3** Ich kann die Schnittpunkte zweier Parabeln oder einer Parabel mit einer Geraden bestimmen.

Materialübersicht für dieses Kapitel

Das hier aufgelistete Material ist jeweils mit einem Verweis versehen, an dem Sie erkennen, wo Sie das Material finden. Dabei steht:

- **SB** für das zugehörige Schulbuch,
- **MB** für den gedruckten Materialblock,
- **KOSIMA** für Online-Angebote auf der **KOSIMA-Homepage**:
<http://www.ko-si-ma.de> → Produkte → Handreichungen → mathewerkstatt 10,
- **CORNELSEN** für Online-Angebote bei Cornelsen mit **Mediencode** (Buchkennung: MWS040048):
www.cornelsen.de/mathewerkstatt → mathewerkstatt 10 oder mathewerkstatt 6.

- | | | |
|--|-----------------------------|--|
| | Quadratische Gleichungen 1 | Bild der Einstiegsseite (SB KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 2 | Datei <i>Simulation des Anhaltewegs eines Autos</i> (SB E1 CORNELSEN, Mediencode: 008-1) |
| | Quadratische Gleichungen 3 | Basisaufgabe <i>Bremswege beim Auto bestimmen</i> (SB E2 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 4 | Applet <i>Stoppuhr</i> (SB E4 CORNELSEN, Mediencode: 010-1) |
| | Quadratische Gleichungen 5 | Wissensspeicher <i>Funktionen 9</i> (SB E5 MB Kl. 8) |
| | Quadratische Gleichungen 6 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Funktionen 9</i> (SB E5/E6 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 7 | Basisaufgabe <i>Brückenformen</i> (SB E6 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 8 | DGS-Datei <i>Untersuchung der Schnittpunkte von Parabeln und Geraden</i> (SB E6 CORNELSEN, Mediencode: 012-1) |
| | Quadratische Gleichungen 9 | Kopiervorlagen <i>Untersuchung der Schnittpunkte von Parabeln und Geraden</i> (SB E6 CORNELSEN, Mediencode: 012-2) |
| | Quadratische Gleichungen 10 | Methodenspeicher <i>Hilfsmittel 11</i> (SB E8 MB Kl. 9) |
| | Quadratische Gleichungen 11 | Ausgefüllter Methodenspeicher <i>Hilfsmittel 11</i> (SB E8 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 12 | Basisaufgabe <i>Größte Fläche finden</i> (SB E9 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 13 | Wissensspeicher <i>Gleichungen 3</i> (SB O1 MB Kl. 8) |
| | Quadratische Gleichungen 14 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Gleichungen 3</i> (SB O1 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 15 | Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 1</i> (SB O1 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 16 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 1</i> (SB O1 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 17 | Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 2</i> (SB O2/O3 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 18 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 2</i> (SB O2/O3 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 19 | Wissensspeicher <i>Gleichungen 2</i> (SB O3 MB Kl. 8) |
| | Quadratische Gleichungen 20 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Gleichungen 2</i> (SB O3 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 21 | Basisaufgabe <i>Eine Formel zum Lösen einer quadratischen Gleichung</i> (SB O1 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 22 | Wissensspeicher <i>Funktionen 15</i> (SB O4/O4 MB Kl. 8) |
| | Quadratische Gleichungen 23 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Funktionen 15</i> (SB O4/O4 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 24 | Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 3</i> (SB O4/O4 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 25 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 3</i> (SB O4/O4 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 26 | Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 4</i> (SB O5/O6 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 27 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Quadratische Gleichungen 4</i> (SB O5/O6 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 28 | Wissensspeicher <i>Funktionen 16</i> (SB O7 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 29 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Funktionen 16</i> (SB O7 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 30 | Wissensspeicher <i>Funktionen 17</i> (SB O8 MB) |
| | Quadratische Gleichungen 31 | Ausgefüllter Wissensspeicher <i>Funktionen 17</i> (SB O8 KOSIMA) |
| | Quadratische Gleichungen 32 | Datei <i>Simulation des Anhaltewegs eines Autos</i> (SB V1 CORNELSEN, Mediencode: 020-1) |
| | Quadratische Gleichungen 33 | Basisaufgabe <i>Unbekannte Werte durch Rückwärtsrechnen bestimmen</i> (SB V6 MB) |

- Quadratische Gleichungen 34 Basisaufgabe *Nullstellen finden* (SB **V8**|MB)
- Quadratische Gleichungen 35 Wissensspeicher *Dezimalzahlen 9* (SB **V14**|MB Kl. 9)
- Quadratische Gleichungen 36 Ausgefüllter Wissensspeicher *Dezimalzahlen 9* (SB **V14**|KOSIMA)
- Quadratische Gleichungen 37 Basisaufgabe *Anzahl der Lösungen untersuchen* (SB **V19**|MB)
- Quadratische Gleichungen 38 Basisaufgabe *Schnittpunkte in Graphenbildern* (SB **V27**|MB)
- Quadratische Gleichungen 39 Basisaufgabe *Extremes finden* (SB **V30**|MB)
- Quadratische Gleichungen 40 Basisaufgabe *Sortieren von typischen Aufgabenformaten* (SB **V40**|MB)
- Quadratische Gleichungen 41 Wissensspeicher *Gleichungssysteme 1* (SB **V43**|MB Kl. 9)
- Quadratische Gleichungen 42 Ausgefüllter Wissensspeicher *Gleichungssysteme 1* (SB **V43**|KOSIMA)
- Quadratische Gleichungen 43 Wissensspeicher *Gleichungssysteme 2* (SB **V43**|MB Kl. 9)
- Quadratische Gleichungen 44 Ausgefüllter Wissensspeicher *Gleichungssysteme 2* (SB **V43**|KOSIMA)
- Quadratische Gleichungen 45 Wissensspeicher *Gleichungssysteme 3* (SB **V43**|MB Kl. 9)
- Quadratische Gleichungen 46 Ausgefüllter Wissensspeicher *Gleichungssysteme 3* (SB **V43**|KOSIMA)
- Quadratische Gleichungen 47 Wissensspeicher *Gleichungssysteme 4* (SB **V43**|MB Kl. 9)
- Quadratische Gleichungen 48 Ausgefüllter Wissensspeicher *Gleichungssysteme 4* (SB **V43**|KOSIMA)
- Quadratische Gleichungen 49 Zusätzliches Trainingsangebot (CORNELSEN, Mediencode: 040-1)
- Quadratische Gleichungen 50 Checkliste zum Ausfüllen (SB|MB & CORNELSEN)